Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research

Professor Dr. Susanne Fuchs-Seliger

Die Theorie der Rationalen Wahl mit Anwendungen in der Ökonomie

Habilitationsschrift 1982
(faksimilierte Ausgabe)

Inhaltsverzeichnis: Seite

I. Kapitel: Die Theorie der rationalen Wahl

§ 1 Einführung

Die Rationalität menschlichen Handelns ist Gegenstand philosophischer, sozialwissenschaftlicher und ökonomischer Untersuchungen. Hinsichtlich der Auslegung des Rationalitätsprinzips gibt es jedoch in den verschiedenen Disziplinen erhebliche Meinungsunterschiede.
In der Theorie der rationalen Wahl, die durch Abstraktion aus gewissen Nachfragemodellen entwickelt wurde, wird der Versuch unternommen, menschliches Wahlverhalten zu mathematisieren.
Da wir es in der Ökonomie stets mit einer Gruppe oder Individuen, die Entscheidungen treffen, zu tun haben, kann diese Theorie auch als Grundlage ökonomischer Modelle verwendet werden.
Wird in ökonomischen Lehrbüchern von rationalem Handeln gesprochen, so verstehen die Autoren darunter häufig, daß die Präferenzrelation, die dem Handeln des homo oeconomicus zugrundeliegt, transitiv ist. Wie jedoch Sonnenschein (1971), Shafer (1974), Gale und Mas-Colell (1975) u.a. gezeigt haben, sind sinnvolle ökonomische Modelle, in denen keine Transitivität gefordert wird, durchaus konstruierbar.
Auch unter der Annahme, daß sich das einzelne Individuum transitiv verhält, lassen sich leicht Beispiele dafür finden, um zu demonstrieren, daß die Transitivität beim Übergang vom Individuum zur Gemeinschaft verloren geht. Umgekehrt kann das Verhalten der Gesellschaft transitiv sein, ohne daß alle Individuen auch demgemäß handeln.

Häufig wird unter rationalem Verhalten des Handlungsträgers auch verstanden, daß dieser seine Nutzen- oder Gewinnfunktion maximiert. Wie jedoch seit einiger Zeit bekannt ist, kann z.B. das Verhalten eines Individuums, das durch eine lexikographische Präferenzordnung bestimmt wird, durch keine reellwertige Funktion repräsentiert werden.

Heftige Meinungsverschiedenheiten entstanden aber auch in anderer Hinsicht: Selbst wenn einige Autoren dem Individuum noch zugestehen, daß dieses eine Nutzenfunktion besitzt, so bezweifeln sie jedoch, daß jeder der Handlungsträger diese maximiert. Nach Ansicht dieser Autoren müsse in ein ökonomisches Modell mit eingehen, daß ein Individuum in vielen Situationen rein impulsiv und launisch handelt.
Einige andere Ökonomen vertreten wiederum die Meinung, daß es bereits genügt, wenn Rationalität nur als Tendenz besteht. Andere gehen davon aus, daß es für die Rationalität auf Marktebene hinreichend ist, wenn die Mehrheit der Marktteilnehmer rational reagiert (vgl. G.Becker (1962)). Diese Vorstellung wurde durch Vorgänge in der Theorie der Thermodynamik angeregt; denn wie wir wissen, ist das augenblickliche Verhalten des einzelnen Teilchens bei der Braunschen Molekularbewegung ohne Bedeutung. Die Gesamtheit der Partikel bewegt sich jedoch nach genau kalkulierbaren Gesetzen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die oben zitierten verschiedenen Meinungen jedoch nicht bewertet oder weiterverfolgt werden. Vielmehr wird der Begriff "rationales Handeln" exakt definiert und alle weiteren Untersuchungen darauf aufgebaut.

Der Ursprung der hier zugrundegelegten Auffassung von einem rational handelnden Individuum geht auf Uzawa (1956) und Arrow (1959) zurück. Nach Uzawa handelt ein Individuum nur dann rational, wenn es in seinem Verhalten ein bestimmtes Gesetz, das durch Abstraktion aus dem Starken Axiom der Theorie der Revealed Preference gewonnen wurde, befolgt. Diese Idee griff Arrow auf, indem er noch weitere Kriterien für rationales Verhalten, die in unmittelbarer Beziehung zu dem Starken Axiom stehen, angab.
Wir schliessen uns jedoch M.Richter (1971) an und wollen vom intuitiven Standpunkt aus betrachtet - unter einem rationalen Handlungsträger ein Individuum, dessen Handlungen stets mit seiner Präferenzvorstellung übereinstimmt, verstehen. Wir werden erkennen, daß eine Person, dessen Auswahlverhalten das Starke

Axiom erfüllt, auch in unserem Sinne rational handelt.
Zu den rationalen Verhaltensregeln, die wir bisher kennen, haben Arrow, Richter, Sen und Pattanaik,Fishburn u.a. beigetragen. Wie wir sehen werden, bestehen zwischen allen diesen enge Beziehungen.
Das Auswahlverhalten des Individuums kann durch eine Korrespondenz, die wir mit Auswahlkorrespondenz bezeichnen, beschrieben werden. Gehen wir davon aus, daß solche Auswahlkorrespondenzen gegeben sind, so stellt sich die Frage, ob eine Präferenzrelation, bezüglich der das Verhalten des Individuums rational ist, existiert.Ein anderes Problem ist, ob es eine Nutzenfunktion gibt, die die gegebene Auswahlkorrespondenz generiert, d.h. ob eine numerische Funktion, die die gewählten Elemente aus jeder zur Wahl stehenden Menge von Objekten mit dem höchsten Nutzenwert belegt, existiert.
Wie wir eingangs bemerkten, kann die Theorie der rationalen Wahl als Grundlage ökonomischer Modelle verwendet werden. Hierauf wird im zweiten Teil dieser Arbeit ausführlich eingegangen. Wir werden sehen, wie die Hypothesen der Theorie der rationalen Wahl -bei angemessener Interpretation- zu sinnvollen Aussagen in Modellen der Nachfrage-, Gleichgewichts-, Wohlfahrts- und Außenwirtschaftstheorie und in der Theorie der kollektiven Wahl führen.

§ 2 AUSWAHLKORRESPONDENZEN

Um das rationale Verhalten eines Handlungsträgers in einem Modell darzustellen, bezeichne X die nicht leere Menge möglicher Alternativen. Es handelt sich hierbei in der Konsumtheorie um Güterbündel, in der Betriebswirtschaftslehre beispielsweise um Entscheidungen über den Einsatz von Produktionsfaktoren, in der Wohlfahrtstheorie um Verteilungen von Gütern und Arbeitsplätzen und bei Wahlen um Kandidaten. Wir untersuchen das Verhalten eines Handlungsträgers in Situationen, in denen ihm jeweils eine nicht leere Teilmenge B von X zur Auswahl gestellt wird. Eine solche Teilmenge wird in Anlehnung an die Nachfragetheorie "Budgetmenge" genannt. Das Individuum wählt nach seinem Belieben aus jeder Budgetmenge B eine Teilmenge h(B) aus. Die Gesamtheit aller Budgetmengen wird mit $\mathcal{B}$ bezeichnet. $\langle X,\mathcal{B}\rangle$ heißt der "Budgetraum".

Die Aktionen des Handlungsträgers können durch eine Korrespondenz, durch die $\mathcal{B}$ in die Potenzmenge von X abgebildet wird, beschrieben werden. Zur präzisen Darstellung führen wir die folgende Definition ein.

Definition 2.1

Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{B} \subseteq 2^X$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Eine Abbildung $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt Auswahlkorrespondenz:

$$\forall B \in \mathcal{B}: \quad \begin{cases} h(B) \neq \emptyset \\ h(B) \subseteq B \end{cases} .$$

Anmerkung 2.1

h(B) heißt Auswahlmenge von B.

Wie bereits eingangs bemerkt wurde, wollen wir unter einem rationalen Handlungsträger ein Individuum verstehen, dessen Aktionen mit seiner Präferenzvorstellung übereinstimmt. Da aber diese Relation nicht vollständig zu sein braucht, unterscheiden wir zwischen einem m-rationalen, und einem b-rationalen Handlungsträger und führen deshalb die folgenden Definitionen ein:

Definition 2.2

Sei X eine beliebige Menge und $\succsim$ eine Relation auf X, die als die Nichtschlechtermenge interpretiert werden soll.

a) $(\forall x,y \in X)[x \succ y \Leftrightarrow (x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x))]$

b) $(\forall x,y \in X)[x \sim y \Leftrightarrow (x \succsim y \wedge y \succsim x)]$

$x \succ y$ wird gelesen: x ist besser als y,

$x \sim y$ wird gelesen: x ist ebenso gut wie y

Definition 2.3

Sei X eine beliebige Menge und $\succsim$ eine Relation auf X. Dann heißt

a) $y \in X$ ein "maximales Element" dieser Menge, genau dann, wenn für alle $z \in X$ gilt: $\neg(z \succ y)$[1]

b) $y \in X$ heißt ein "bestes Element" von X genau dann, wenn für alle $z \in X$ gilt: $y \succsim z$.

Offenbar sind beide Definitionen äquivalent, wenn es sich bei $\succsim$ um eine vollständige Relation handelt. Wir sehen ferner, daß jedes beste Element auch maximal in X ist.

Definition 2.4

Sei eine Relation $\succsim$ auf X gegeben. Dann heißt $h: \mathcal{B} \to 2^X$ "m-rational" (maximal-rational) bezüglich $\succsim$ genau dann, wenn:

$(\forall B \in \mathcal{B})[h(B) = \{x \mid x \in B \wedge (\neg \exists z \in B)[z \succ x]\}]$.

Definition 2.5

Sei eine Relation $\succsim$ auf X gegeben. Dann heißt $h: \mathcal{B} \to 2^X$ "b-rational" bezüglich $\succsim$ genau dann, wenn

---

[1] $\neg$: non

$(\forall B \in \mathcal{B})[h(B) = \{x \mid x \in B \wedge (\forall z \in B)[x \succsim z]\}]$.

Anmerkung 2.2

Wie unmittelbar gesehen werden kann, ist jede bezüglich der Relation $\succsim$ b-rationale Auswahlkorrespondenz auch bezüglich dieser Relation m-rational. Das umgekehrte ist nur dann der Fall, wenn $\succsim$ vollständig ist.

Anmerkung 2.3

Das Wort Auswahlkorrespondenz wird von nun an durch AWK abgekürzt.

Definition 2.6

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt "rational" genau dann, wenn es eine Relation $\succsim$ gibt derart, daß h bezüglich dieser m-rational ist. $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt irrational, wenn eine solche Relation nicht existiert.

Ist das Verhalten eines Handlungsträgers beobachtbar, so stellt sich die Frage, ob dieses "rationalisiert" werden kann, d.h. ob es eine Relation $\succsim$ gibt bezüglich welcher $h: \mathcal{B} \to 2^X$ m-rational ist.

Das folgende Beispiel zeigt eine irrationale AWK.

Es sei $X = \{x,y,z,d\}$,

$$\mathcal{B} = \{B^1, B^2, B^3\} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} B^1 &= \{x,y,z,d\}, & h(B^1) &= \{x,y\} \\ B^2 &= \{x,y,d\}, & h(B^2) &= \{y\} \\ B^3 &= \{x\}, & h(B^3) &= \{x\} . \end{aligned}$$

Angenommen, der Handlungsträger verhielte sich rational, dann müßte es nach Def. 2.6 eine Relation $\succsim$ geben derart, daß

$$\neg(x \succ x),\ \neg(y \succ x),\ \neg(d \succ x) \text{ und } \neg(z \succ x)$$

erfüllt wäre. Nach der gleichen Definition müßte dann aber auch

$$x \in h(B^2)$$

gelten, was jedoch nach Konstruktion der AWK nicht der Fall ist.

Es ist jedoch auch durchaus denkbar, daß ein Individuum bzgl. der Relation $\succsim^1$ irrational, aber bezüglich $\succsim^2$ rational handelt. Betrachten wir dazu als Beispiel die Menge

$X = \{a,b,c\}$ mit $\mathcal{B} = \{B^1,B^2\}$ und

$B^1 = \{a,b\}, \quad h(B^1) = \{a\}$

$B^2 = \{a,b,c\}, \quad h(B^2) = \{a,c\}.$

Besitzt der Handlungsträger die Wertvorstellung $a \succsim^1 a$, $a \succsim^1 b$, $a \succsim^1 c$, $c \succsim^1 c$ und $c \succsim^1 b$, so verhält er sich bezüglich $\succsim^1$ rational.

Hat er jedoch eine andere Wertvorstellung, z.B. die folgende: $a \succsim^2 a$, $b \succsim^2 a$ und $a \succsim^2 c$, so ist sein Verhalten bezüglich $\succsim^2$ nicht rational.

Diese beiden Beispiele zeigen, daß zwei Möglichkeiten bestehen:

1) Es gibt keine Relation, die eine gegebene Nachfragefunktion rationalisiert.
2) Die Auswahlkorrespondenz ist rational bezüglich der Relation G, aber diese Relation repräsentiert nicht die Wertvorstellung des Handlungsträgers.

Mit anderen Worten, es ist durchaus möglich, daß die Auswahlkorrespondenz durch eine Relation, die aber nicht der Wertvorstellung des Individuums entspricht, rationalisiert werden kann. Dieser Fall kann durch zusätzliche Regeln, wie wir sie im nächsten Abschnitt besprechen, verhindert werden.

§ 3 RATIONALE AUSWAHLREGELN

Grundlegend für unsere weiteren Untersuchungen sind einige Gesetzmäßigkeiten, denen das Verhalten rational handelnder Individuen unterworfen werden soll. Um diese zu formulieren, müssen zunächst die Definitionen einiger Relationen eingeführt werden.

Uzawa (1956) verallgemeinerte die Relation "revealed vorgezogen", die erstmals von Samuelson (1938) für die Nachfragetheorie definiert wurde und dort in der Theorie der Revealed Preference, einem rationalen Nachfragemodell, eine zentrale Rolle spielt, um rationales Verhalten zu garantieren.

Definition 3.1

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK und $x,y \in X$.

$$x\tilde{P}_h y :\Leftrightarrow (\exists B \in \mathcal{B})[x \in h(B) \wedge y \in B \setminus h(B)] .$$

$x\tilde{P}_h y$ wird gelesen: x wird y revealed vorgezogen.

Diese Bezeichnung geht ebenfalls auf die Theorie der Revealed Preference zurück und läßt sich dort mit der Hypothese erklären, daß jeder Marktteilnehmer durch sein Verhalten seine Präferenzen offenbart.

Hinter dieser Interpretation der Relation $\tilde{P}_h$ verbirgt sich bereits die Forderung, daß insbesondere der zweite Fall im letzten Teil des vorangegangenen Paragraphen ausgeschlossen werden soll. Dort war von der Möglichkeit die Rede, daß die Handlungsweise des Individuums zwar durch eine Relation rationalisierbar sein kann, die jedoch nicht die Präferenzvorstellung des Handlungsträgers widerspiegelt. Der Theorie der Revealed Preference liegt aber intuitiv bereits die Idee zugrunde, daß die Nachfragefunktion, die das Verhalten des Marktteilnehmers charakterisiert, durch eine Relation, die der Präferenzvorstellung des Individuums entspricht, rationalisiert werden kann. Die Aussage "x wird y revealed vorgezogen" bedeutet demnach, daß der Marktteilnehmer, indem er aus einer Budgetmenge, die x und y enthält, x wählt und y zurückweist, allen Beobachtern seine wahren Präferenzen zeigt. Er hat durch seine Aktion darauf hingewiesen, welcher Alternative er tatsächlich den Vorzug gibt. Diese Interpretation setzt also bereits ein rational handelndes Individuum voraus.

In der nächsten Definition erklären wir die Relation "indirekt revealed vorgezogen".

Definition 3.2

Sei eine AWK $h: \mathcal{B} \rightarrow 2^X$ vorgegeben.

$(\forall x,y\in X)[\, xP^*_h\ y :\Leftrightarrow x\tilde{P}_h y \vee (\exists x^1..x^k \in X)[x\tilde{P}_h x^1 \wedge .. \wedge x^k\tilde{P}_h y]]$

Wie wir sehen, ist P^*_h die transitive Hülle[1] von $\tilde{P}_h$. Sie läßt sich folgendermaßen interpretieren :

Wenn die Alternativen x und y nicht direkt in einer Budgetsituation B miteinander verglichen werden können, so soll eine endliche Folge von Budgetsituationen und in diesen Alternativen existieren, die nacheinander in Beziehung gesetzt werden können und so einen indirekten Vergleich ermöglichen.

Die Relationen $\tilde{P}_h$ und P^*_h hängen von den vorausgesetzten Auswahlkorrespondenzen ab. Da jedoch im folgenden keine Mißverständnisse zu erwarten sind, soll zur Abkürzung anstelle von $\tilde{P}_h$ und P^*_h die Bezeichnungen $\tilde{P}$ und P^* verwendet werden. Das gleiche gilt für die folgende Relation V. Diese unterscheidet sich von $\tilde{P}$ dadurch, daß xVy die Möglichkeit einschließt, daß sowohl x als auch y in der Auswahlmenge einer Budgetmenge B enthalten sind.

Definition 3.3

$(\forall x,y\in X)[\, xVy :\Leftrightarrow (\exists B\in\mathcal{B})[x\in h(B) \wedge y\in B]]$.

Die transitive Hülle von V werde mit W bezeichnet.

---

1) Sei G eine Relation auf X.
Dann heißt G^* "transitive Hülle von G" genau dann, wenn
$(\forall x,y\in X)[xGy \vee (\exists k\in\mathbb{N})(\exists x^1..x^k)[xGx^1 \wedge .. \wedge x^kGy]]$.

In Übereinstimmung mit Sen (1971) verwenden wir eine allgemeine Form des von Samuelson (1938) in der Theorie der Revealed Preference eingeführte "Schwache Axiom".

Axiom (WA): Schwaches Axiom der Theorie der Revealed Preference
$x\tilde{P}y \Rightarrow \neg(yVx)$

Anmerkung 3.1

Ursprünglich wurde das von Arrow aufgestellte Postulat

$x,y \in h(B) \Rightarrow \neg(x\tilde{P}y)$.

mit dem Namen "Schwaches Axiom" bezeichnet. Die beiden Axiome sind jedoch nicht äquivalent . Arrows Postulat ist gleichbedeutend mit $x\tilde{P}y \Rightarrow x \notin h(B) \vee y \notin h(B)$. Hieraus könnte aber auch folgen ,daß $x \in B \setminus h(B)$ und $y \in h(B)$, was sicher nicht gemeint war .

Ein anderes Gesetz, welches ebenfalls ein vernünftige handelndes Individuum befolgen sollte, ist das sogenannte "Starke Axiom der Theorie der Revealed Preference". Dieses wurde ursprünglich von Ville (1946) und Houthakker (1950) unabhängig voneinander als Postulat in ein Modell der Nachfragetheorie aufgenommen.
Houthakker benutzte es für den Nachweis, daß in der Theorie der Revealed Preference das Starke Axiom zusammen mit anderen Voraussetzungen über die Nachfragefunktion zu einer transitiven, vollständigen und strikt konvexen Relation führt, die die Nachfragefunktion des Marktteilnehmers rationalisiert. Hierüber wird später noch ausführlicher berichtet.

Axiom (SA)

$xP^*y \Rightarrow \neg(yVx)$

Das Starke Axiom geht in dieser allgemeinen Form auf Uzawa (1956) zurück, wenn es auch von diesem nicht so genannt wurde. Diese Bezeichnungsweise stammt von Arrow (1959), der das Starke Axiom auch ein Kriterium für rationales Verhalten nannte. Es sei jedoch noch hinzugefügt, daß Uzawa und Arrow die Form

$$x,y \in h(B) \Rightarrow \neg(xP^*y)$$

benutzen. Das hier verwandte Axiom geht auch auf Sen (1971) zurück. Wie jedoch leicht gezeigt werden kann, besteht Äquivalenz zwischen den beiden Versionen (vgl. Fuchs-Seliger (1976a)).

Das Starke Axiom legt folgende Interpretation nahe:

Wenn in einer Folge von Wahlakten der Handlungsträger indirekt gezeigt hat, daß er die Alternative x der Alternative y vorzieht, so soll es keine Budgetmenge geben, in der x und y zur Wahl stehen und y gewählt wird.

Betrachten wir das Starke Axiom genauer, so wird offenbar, daß diese Regel auch die Gültigkeit von

$$x P^* y \wedge y W x$$

zuläßt. Um diese Möglichkeit auszuschließen, können wir anstelle von (SA) das Axiom (SA^*) benutzen, welches folgendes besagt:

Axiom (SA^*)

$$x P^* y \Rightarrow \neg(yWx)$$

Anmerkung 3.2.

Offensichtlich impliziert das Axiom (SA^*) das Postulat (SA) und damit auch das Axiom (WA).

Das Schwache Axiom steht in enger Verwandtschaft zu einer Verhaltensregel von Arrow (1959), die als nächste zitiert werden soll.

(α)

$$B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset \Rightarrow h(B^1) = B^1 \cap h(B^2)$$

Diese Regel läßt sich leicht auf folgende Weise interpretieren:

Stehen alle Alternativen von B^1 auch in der Budgetmenge B^2 zur Wahl und hat das Individuum aus B^2 eine gewählt, die auch in

B^1 enthalten ist, so sind alle aus B^1 gewählten Elemente auch in der Auswahlmenge von B^2, d.h. in $h(B^2)$, enthalten.

Die folgende Regel wurde von Arrow (1959) und Sen und Pattanaik (1969) untersucht.

(β)

$$B^1 \subseteq B^2 \Rightarrow B^1 \cap h(B^2) \subseteq h(B^1)$$

Die Interpretation von (β) ergibt sich wie im vorangegangenen Falle zwangsläufig. Ein Beispiel von Sen (1970, S. 17) verdeutlicht in einprägsamer Weise diese Regel. Dieses sagt aus, daß der Weltmeister einer Sportart, der ein Pakistani ist, auch Landesmeister von Pakistan in der gleichen Disziplin sein muß.

Die Regel (β) wurde auch schon früher in einem anderen Zusammenhang bei Nash (1950), Chernoff (1954), Radner und Marschak (1954) und Luce und Raiffa (1957) erwähnt.

Auch die folgende Verhaltensregel können wir bei Sen und Pattanaik nachlesen.

(γ)

$$[B^1 \subseteq B^2 \wedge h(B^1) \cap h(B^2) \neq \emptyset] \Rightarrow h(B^1) \subseteq h(B^2)$$

Die Regel (γ) finden wir noch bei Sen (1970, S. 17) in der Form

$$[x,y \in h(B^1) \wedge B^1 \subseteq B^2] \Rightarrow [x \in h(B^2) \Leftrightarrow y \in h(B^2)] \quad .$$

Eine zentrale Verhaltensregel, die insbesondere bei Repräsentierbarkeitsproblemen von Auswahlkorrespondenzen eine Rolle spielt (vgl. §7), ist das Kongruenzaxiom von M. Richter (1971). Bezeichnen wir wie früher die transitive Hülle von V mit W, so heißt dieses Postulat:

Axiom (CA)

$$(\forall B \in \mathcal{B})(\forall x,y \in B)[x \in h(B) \wedge yWx \Rightarrow y \in h(B)]$$

Anmerkung 3.3

An der Form

$$(\forall B\in\mathcal{B})(\forall x,y\in B)\,[x\in h(B) \wedge y\in B\setminus h(B) \Rightarrow \neg(yWx)]$$

des Axioms (CA) läßt sich leicht erkennen, daß es eine stärkere Bedingung ist, als das Axiom (WA), das wir auch auf die Form

$$(\forall x,y\in X)[(\exists B\in\ )[x\in h(B)\wedge y\in B\setminus h(B) \Rightarrow \neg(yVx)]]$$

bringen können.

Auch das nachfolgende Axiom (VA) geht auf M. Richter (1971) zurück. Es ist offensichtlich, daß dieses Postulat schwächer als das Kongruenzaxiom ist und von diesem impliziert wird.

V-Axiom (VA)

$$(\forall y\in X)(\forall B\in\mathcal{B})[(y\in B\wedge(\forall u\in B)[yVu])\Rightarrow y\in h(B)]$$

Dieses fordert, daß eine Alternative y, die bezüglich der Relation V maximal in B ist, aus B gewählt werden soll.

Bei M. Richter (1971) treten auch die nächsten beiden Versionen des Schwachen und Starken Axioms auf. Um diese in entsprechender Weise formulieren zu können, führen wir noch die Relation S und H ein.

Definition 3.4

$\forall x,y\in X$:

$xSy :\Leftrightarrow xVy \wedge x\neq y$.

Bezeichnen wir mit H die transitive Hülle von S und verwenden wir diese beiden Relationen, so erhalten wir schließlich Richters Versionen des Schwachen und Starken Axioms.

Axiom (WA')

$xSy \Rightarrow \neg(ySx)$

Axiom (SA')

$xHy \Rightarrow \neg(yHx)$

Anmerkung 3.4

Wie leicht einzusehen ist, impliziert das Axiom (WA'') und damit erst recht das Postulat (SA'), daß die Auswahlmengen h(B) für alle $B \in \mathcal{B}$ stets aus genau einem Element bestehen, so daß also $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine Funktion darstellt.

§ 4 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN RATIONALEN VERHALTENSREGELN

Zwischen den in § 3 genannten Verhaltensregeln bestehen nun Zusammenhänge verschiedenster Art, von denen einige hier behandelt werden sollen.

Wie wir bereits bemerkten, implizieren sowohl das Axiom (SA) als auch das Kongruenzaxiom das Schwache Axiom (WA) und das Axiom (VA). Die Umkehrung kann nur in Spezialfällen gezeigt werden.

Arrow (1959) konnte den Nachweis erbringen, daß unter der Voraussetzung (A) $\mathcal{B}$ enthalte alle endlichen Teilmengen von X außer der leeren Menge, das Starke und das Schwache Axiom äquivalent sind. Diese Forderung schwächen wir dadurch etwas ab, daß wir nur verlangen, daß jede Teilmenge der Mächtigkeit 3 in $\mathcal{B}$ enthalten sein soll. Wir gewinnen dann die Äquivalenz von (WA), (SA), (CA) und (SA*).

Theorem 4.1

Sei $|X| \geqq 3$ und jede Teilmenge von X der Mächtigkeit 3 sei in enthalten. Dann gilt:

(a) (WA) $\Leftrightarrow$ (SA)
(b) (WA) $\Leftrightarrow$ (CA)
(c) (WA) $\Leftrightarrow$ (SA*) .

Beweis zu (a): Es genügt zu zeigen, daß (WA) das Axiom (SA) impliziert, deshalb setzen wir voraus, daß für zwei beliebige Alternativen u und v aus X, uP^*v gilt. Haben wir nachgewiesen, daß $\tilde{P}$ transitiv ist, dann ergibt sich hieraus $u\tilde{P}v$ und damit $\neg(vVu)$ nach dem Schwachen Axiom.

Wir betrachten deshalb drei verschiedene Alternativen $x,y,z \in X$ mit $x\tilde{P}y \wedge y\tilde{P}z$. Das Schwache Axiom führt auf

$$\neg(yVx) \wedge \neg(zVy) \ .$$

Mit der Definition von V können wir auf

(1) $(\forall B \in \mathcal{B})[y \notin h(B) \vee x \notin B]$,
(2) $(\forall B \in \mathcal{B})[z \notin h(B) \vee y \notin B]$

schließen. Da nach Voraussetzung die Menge $B^o = \{x,y,z\}$ zu $\mathcal{B}$ gehört, folgt $h(B^o) \neq \emptyset$.

Die Annahme $z \in h(B^o)$ führt mit (2) zu $y \notin B^o$, wodurch ein Widerspruch zur Definition von B^o entsteht. Wenn wir aber annehmen, daß $y \in h(B^o)$, folgt mit (1) $x \notin B^o$ und damit ebenfalls ein Widerspruch zur Definition von B^o. Deshalb muß $x \in h(B^o)$ gelten, und wir erhalten $x\tilde{P}z$.

Beweis zu (b): Da (CA) ⇒ (WA) allgemeingültig ist, genügt es, die Umkehrung unter der obigen Voraussetzung nachzuweisen. Dazu zeigen wir zunächst, daß V transitiv ist und setzen deshalb

(3) $xVy \wedge yVz$

voraus. Nach Voraussetzung gilt $B^o = \{x,y,z\} \in \mathcal{B}$.

Angenommen, es gelte $x \notin h(B^o)$, so führt diese Annahme zusammen mit dem Schwachen Axiom und (3) auf $y \notin h(B^o)$. Da $h(B^o) \neq \emptyset$, muß infolgedessen $z \in h(B^o)$ zutreffen, so daß wir auf $z\tilde{P}y$ schließen können. Dieses Ergebnis führt aber mit (WA) auf einen Widerspruch zu (3). Damit müssen wir die Annahme verwerfen und erhalten xVz.

Es werde nun $B^1 \in \mathcal{B}$ und $x,y \in B^1$: $x \in h(B^1) \wedge yWx$ betrachtet. Hiervon kann mit der Transitivität von V auf yVx geschlossen werden, so daß also mit dem Schwachen Axiom $y \in h(B^1)$ folgt, womit die Behauptung (b) bewiesen ist.

Beweis zu (c): Wie zuvor gezeigt wurde, folgt aus (WA) und den Hypothesen dieses Theorems, daß V transitiv ist. Setzen wir xP^*y voraus und nehmen yWx an, so ergibt sich demnach yVx. Da unter (a) bereits nachgewiesen wurde, daß das Schwache Axiom das Axiom (SA) impliziert, folgt aus xP^*y $\neg(yVx)$, also ein Widerspruch zu yVx. q.e.d.

Zwischen dem Schwachen Axiom und den anderen hier genannten Verhaltensregeln lassen sich weitere Beziehungen herstellen.

Wie leicht gezeigt werden kann, impliziert das Schwache Axiom die Regeln (α), (β) und (γ) (Fuchs-Seliger (1976a)). Die Umkehrung gilt jedoch nicht allgemein, was am Beispiel der Regel (α) belegt werden soll:

$$X = \{a,b,c,d\} \quad , \quad \mathcal{B} = \{B^1,B^2,B^3\}$$
$$B^1 = \{a,b,c\} \qquad h(B^1) = \{a\}$$
$$B^2 = \{a,b,d\} \qquad h(B^2) = \{b\}$$
$$B^3 = \{b,c,d\} \qquad h(B^3) = \{d\}$$

Da nach Konstruktion $a\tilde{P}b$ gilt, müßte mit Hilfe des Schwachen Axioms $a \notin B^2$ folgen, was im Widerspruch zur Festsetzung von B^2 steht.

Die Regel (α) ist jedoch nach dem Schluß ex falso quodlibet erfüllt, da keine Budgetmenge in einer anderen enthalten ist.

Unter der Annahme jedoch, daß $\mathcal{B}$ alle Teilmengen von X der Mächtigkeit 2 enthält, besteht, wie der folgende Satz zeigt, Äquivalenz zwischen dem Schwachen Axiom und (α).

Theorem 4.2

Sei $|X| \geqq 2$, $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK und $\mathcal{B}$ enthalte alle Teilmengen von X der Mächtigkeit 2. Dann gilt (WA) $\Leftrightarrow$ (α).

Beweis

Da "$\Rightarrow$" bereits in Fuchs-Seliger (1976a) nachgewiesen wurde, genügt es, die Umkehrung zu zeigen.

Wir betrachten daher $x,y \in X$ mit $x\tilde{P}y$ und erhalten

(1) $\quad (\exists B^0 \in \mathcal{B})[x \in h(B^0) \wedge y \in B^0 \setminus h(B^0)]$.

Angenommen, es gelte yVx, so folgt hieraus

(2) $\quad (\exists B^1 \in \mathcal{B})[y \in h(B^1) \wedge x \in B^1]$.

Da $\{x,y\} \in \mathcal{B}$ und $\{x,y\} \subseteq B^0$, können wir mit (α) und (1) auf

(3) $\quad h(\{x,y\}) = h(B^0) \cap \{x,y\} = \{x\}$

schließen. Da ferner $x,y \in B^1$, können wir (α) und (2) anwenden und erhalten

(4) $h(\{x,y\}) = h(B^1) \cap \{x,y\}$.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $x,y \in h(B^1)$, woraus sich mit (4) $h(\{x,y\}) = \{x,y\}$ ergibt, im Widerspruch zu (3).

2. Fall: $y \in h(B^1) \wedge x \notin h(B^1)$. Bei Anwendung von ($\alpha$) erhalten wir $h(\{x,y\}) = \{y\}$, also auch einen Widerspruch zu (3). Infolgedessen ist die Annahme yVx zu verwerfen.

q.e.d.

Da die Äquivalenz (α) $\Leftrightarrow$ (β) $\wedge$ (γ) ohne weitere Voraussetzungen über die Struktur von $\mathcal{B}$ allgemeingültig ist (siehe Fishburn (1973, S. 195)), gewinnen wir folgendes Korollar zu Theorem 4.2:

Korollar 4.1

Sei $|X| \geq 2$ und $\mathcal{B}$ enthalte alle Teilmengen von X der Mächtigkeit 2, dann gilt

$$(WA) \Leftrightarrow (\alpha) \Leftrightarrow (\beta) \wedge (\gamma) .$$

Als Korollar zu den Theoremen 4.1 und 4.2 ergibt sich ferner unmittelbar das

Korollar 4.2

Ist $|X| \geq 3$ und enthält $\mathcal{B}$ alle Teilmengen von X der Mächtigkeit 2 oder 3, so gilt: $(SA^*) \Leftrightarrow (SA) \Leftrightarrow (WA) \Leftrightarrow (\alpha) \Leftrightarrow (\beta) \wedge (\gamma) \Leftrightarrow (CA)$.

Anmerkung 4.1

Die vorangegangenen Resultate haben gezeigt, daß unter angemessenen Bedingungen Äquivalenz zwischen den verschiedenen Verhaltensregeln hergestellt werden kann.

Worauf in Fuchs-Seliger (1976a) bereits früher hingewiesen wurde, besteht auch Äquivalenz zwischen (CA), (SA), und (WA) wenn die Bedingung

$(B): (\forall B^1, B^2 \subset X) [B^1, B^2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B^1 \cup B^2 \in \mathcal{B}]$

von $\mathcal{B}$ erfüllt wird. Einer der wichtigsten Schritte im Beweis von (WA) $\Leftrightarrow$ (SA) besteht darin, die Transitivität von $\tilde{P}$ unter der Voraussetzung von (B) und (WA) nachzuweisen. Es läßt sich auch zeigen (vgl. Hansson (1968)), daß unter (B) die Äquivalenz von (α) und (WA) Gültigkeit besitzt. Im nachfolgenden Satz wird unter anderem dieses Resultat auf eine von Hanssons Beweismethode unterschiedliche Art nachgewiesen.

Theorem 4.3

Erfüllt $\mathcal{B}$ die Bedingung (B), so gilt

$$(\alpha) \Leftrightarrow (WA) \Leftrightarrow (CA) \Leftrightarrow (SA) \Leftrightarrow (SA^*) \Leftrightarrow (\beta) \wedge (\gamma) \quad .$$

Beweis

Wie bereits gezeigt wurde (vgl. Fuchs-Seliger (1976a)). impliziert das Schwache Axiom die Regel (α). Deshalb genügt es, die Implikation (α) $\Rightarrow$ (WA) zu untersuchen. Sei deshalb $x\tilde{P}y$ vorgegeben. Unter der Annahme, das Axiom (WA) gelte nicht, folgt

$$(1) \quad (\exists B^1 \in \mathcal{B})[y \in h(B^1) \wedge x \in B^1] \quad .$$

Von $x\tilde{P}y$ können wir ferner auf

$$(2) \quad (\exists B^2 \in \mathcal{B})[x \in h(B^2) \wedge y \in B^2 \setminus h(B^2)]$$

schließen. Nach Voraussetzung ist $B^1 \cup B^2$ ebenfalls Element von $\mathcal{B}$. Da nach der Definition der Auswahlkorrespondenz $h(B^1 \cup B^2)$ nicht leer ist, gibt es ein $z \in h(B^1 \cup B^2)$. Hieraus folgt

$$z \in B^1 \quad \vee \quad z \in B^2 \quad .$$

1. Unterfall: $z \in B^1$. Da $B^1 \subseteq B^1 \cup B^2$ und $h(B^1 \cup B^2) \cap B^1 \neq \emptyset$, impliziert ($\alpha$):

$$h(B^1) = h(B^1 \cup B^2) \cap B^1 \quad ,$$

wovon wir mit (1) auf $y \in h(B^1 \cup B^2) \cap B^1$ schließen können. Also gilt $y \in h(B^1 \cup B^2)$, und damit erhalten wir $y \in h(B^1 \cup B^2) \cap B^2$. Da aber auch $h(B^2) = h(B^1 \cup B^2) \cap B^2$ gilt, folgt $y \in h(B^2)$, im Widerspruch zu (2).

2. Unterfall: $z \in B^2 \wedge z \notin B^1$. Damit gilt $h(B^1 \cup B^2) \cap B^2 \neq \emptyset$, und wir erhalten wieder mit (α): $h(B^2) = h(B^1 \cup B^2) \cap B^2$. Hiervon können wir auf $x \in h(B^1 \cup B^2)$ schließen, so daß auch $h(B^1 \cup B^2) \cap B^1 \neq \emptyset$ gilt. Mit (α) ergibt sich $h(B^1 \cup B^2) \cap B^1 = h(B^1)$. Also gilt $y \in h(B^1 \cup B^2)$. Da $y \in h(B^1 \cup B^2) \cap B^2$, können wir wieder mit (α) auf $y \in h(B^2)$ schließen, im Widerspruch zu (2).

Haben wir noch nachgewiesen, daß die Implikation (WA) $\Rightarrow$ (SA*) wahr ist, so ist der Satz aufgrund der ihm vorangehenden Bemerkung bewiesen. Hierzu genügt es im wesentlichen, die Transitivität von V zu überprüfen. Seien drei verschiedene Elemente x,y,z mit $xVy \wedge yVz$ vorgegeben. Ferner sei das Axiom (WA) vorausgesetzt. Dann folgt definitionsgemäß

(3) $(\exists B^1 \in \mathcal{B})[x \in h(B^1) \wedge y \in B^1]$,
(4) $(\exists B^2 \in \mathcal{B})[y \in h(B^2) \wedge z \in B^2]$.

Falls $z \in B^1$ oder $x \in h(B^1 \cup B^2)$ gilt, ergibt sich hieraus xVz unmittelbar. Betrachten wir nun den Fall:

(5) $z \notin B^1 \wedge x \notin h(B^1 \cup B^2)$.

Da $h(B^1 \cup B^2) \neq \emptyset$, gibt es $\tilde{z} \in h(B^1 \cup B^2)$. Aus (5) folgt $\tilde{z}\tilde{P}x$, so daß mit (WA) $\tilde{z} \notin B^1$ zutrifft. Also muß $\tilde{z} \notin B^2$ erfüllt sein, und es gilt daher $yV\tilde{z}$. Aus $xVy \wedge yV\tilde{z}$ ergibt sich definitionsgemäß $xW\tilde{z}$. Da unter der Voraussetzung (B) mit (WA) auch das Kongruenzaxiom (CA) erfüllt ist, folgt aus $\tilde{z} \in h(B^1 \cup B^2)$, $x \in B^1 \cup B^2$ und $xW\tilde{z}$ das Ergebnis $x \in h(B^1 \cup B^2)$, also ein Widerspruch zu (5). Damit kann (5) nicht zutreffen, und wir erhalten xVy. Setzen wir nun uP^*v voraus und nehmen vWu an, so folgt wegen der Transitivität von V vVu und steht damit im Widerspruch zu (SA), auf dessen Äquivalenz mit (WA) unter der Bedingung (B) bereits hingewiesen wurde.

Theorem 4.4

Besteht für alle $B \in \mathcal{B}$ die Auswahlmenge $h(B)$ aus genau einem Element, so gilt die Beziehung

(a) $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$

(b) $(WA) \Leftrightarrow (WA')$

(c) $(CA) \Leftrightarrow (SA')$.

Beweis

(a): $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Sei $B^1 \subseteq B^2$.

1. Fall: $B^1 \cap h(B^2) = \emptyset$. Da die leere Menge Teilmenge von $h(B^1)$ ist, gilt $B^1 \cap h(B^2) \subseteq h(B^1)$.

2. Fall: $B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset$. Daraus ergibt sich mit (α) sogleich $B^1 \cap h(B^2) \subseteq h(B^1)$.

Beweis für $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$.
Sei $B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset$. Hiervon können wir mit (β) auf $B^1 \cap h(B^2) \subseteq h(B^1)$ schließen. Da jedoch $h(B^1)$ nur aus einem Element besteht, $B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset$ und $h(B^2)$ ebenfalls einelementig ist, muß $h(B^2) = h(B^1)$ gelten, so daß also $h(B^1) \subseteq B^1 \cap h(B^2)$ erfüllt ist.

Der Beweis zu (b) ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen von $\tilde{P}$, V und S, und den Beweis zu (c) können wir bei Richter (1971, S. 37) nachlesen.

Zusammenfassend können wir bemerken, daß voneinander verschiedene Verhaltensregeln äquivalent werden, wenn über die Struktur von $\mathcal{B}$ oder den Wertebereich von h gewisse Voraussetzungen gemacht werden .

§ 5 EXISTENZ VON AUSWAHLKORRESPONDENZEN

Wir gingen bisher von Auswahlkorrespondenzen aus und untersuchten die Frage, ob sie sich durch eine Relation rationalisieren lassen. Wir können aber auch die Umkehrung dieses Problems betrachten, indem daß wir eine Relation auf der Menge der Alternativen als gegeben annehmen und uns die Frage stellen, ob zu dieser Relation eine Auswahlkorrespondenz, die durch jene rationalisiert wird, existiert. Theorem 5.1 präsentiert eine Lösung für den endlichen Fall.

Theorem 5.1

Sei X eine nicht leere, endliche Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^X$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Ferner sei $\succsim$ eine transitive und vollständige Relation auf X [1]. Dann gibt es eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, die durch $\succsim$ rationalisiert wird.

Beweis

Sei $B^1 \in \mathcal{B}$ und B^1 besitze die Mächtigkeit $k \geqq 1$.

Im Falle, daß B^1 aus einem Element z besteht, können wir wegen der Vollständigkeit von $\succsim$ $h(B^1) = \{z\}$ setzen.

Im Falle, daß $B^1 = \{x,y\}$, bedingt die Vollständigkeit von $\succsim$, daß $x \succsim y \vee y \succsim x$ erfüllt ist. Gilt sowohl $x \succsim y$ als auch $y \succsim x$, so setzen wir $h(B^1) = \{x,y\}$. Trifft nur eine der Beziehungen zu, etwa $x \succsim y$, so setzen wir $h(B^1) = \{x\}$.

Sei nun $B^1 = \{x^1,\ldots,x^k\}$ für $k > 2$ und nehmen wir an, ein Element $a \in \{x^1,\ldots,x^{k-1}\}$, mit $a \succsim x^j$ für alle j mit $1 \leqq j \leqq k-1$, sei bereits bestimmt. Gilt $x^k \succsim a$, so führt die Transitivität von $\succsim$ auf $x^k \succsim x^j$ für alle $j \leqq k-1$, und es kann $x^k \in h(B^1)$ ge-

---

[1] Die Bezeichnung $\succsim$ für eine Relation wählen wir stets, wenn ihr die Bedeutung "nicht schlechter als" zukommen soll. Die Bezeichnung $\succ$ benutzen wir, wenn die Relation die Bedeutung "besser als" besitzt. Das Zeichen $\sim$ steht für "äquivalent". Diese Relationen sollen stets die Präferenzvorstellungen eines Individuums widergeben.

setzt werden. Gilt hingegen a $\succsim x^k$, so folgt für alle $j \leqq k$, a $\succ x^j$, und infolgedessen kann h so definiert werden, daß $a \in h(B^1)$. Besteht h(B) nur aus solchen bezüglich $\succsim$ optimalen Elementen von B, so ist h rational bzgl. $\succsim$.

Es gibt jedoch auch Auswahlkorrespondenzen, die sich durch keine Relation rationalisieren lassen. Deren Verhalten kann durch keine azyklische Relation beschrieben werden.

In der Definition 5.1 wird erklärt, was unter einer solchen Relation zu verstehen ist.

Definition 5.1

Sei $\succ$ eine beliebige Relation auf $X \neq \emptyset$. $\succ$ heißt "azyklisch" genau dann, wenn für jedes $k \geqq 2$ gilt: $x^1 \succ x^2 \succ \ldots \succ x^{k-1} \succ x^k \Rightarrow \neg(x^k \succ x^1)$.

Wir betrachten nun eine solche nicht rationalisierbare Auswahlkorrespondenz:

$X = \{x,y,z,d\}$, $\mathcal{B} = \{B^1,\ldots,B^6\}$

$h(\{x,y\}) = h(B^1) = \{x\}$
$h(\{x,z\}) = h(B^2) = \{x\}$
$h(\{x,d\}) = h(B^3) = \{d\}$
$h(\{y,z\}) = h(B^4) = \{y\}$
$h(\{y,z,d\}) = h(B^5) = \{z\}$
$h(\{y,d\}) = h(B^6) = \{y\}$

Gäbe es eine Relation $\succ^1$, die h rationalisierte, so müßte u.a. gelten: $y \succ^1 z$, $z \succ^1 d$, $d \succ^1 x$, $x \succ^1 z$ und $z \succ^1 y$, das hieße $\succ^1$ wäre zyklisch. Aber betrachten wir z.B. die Budgetmenge B^4, so gibt es kein Element $a \in B^4$ derart, daß für alle $u \in B^4$ folgt $\neg(u \succ^1 a)$.

Wir beweisen nun einen Satz, durch den ein Zusammenhang zwischen azyklischer Präferenzvorstellung und rationaler AWK hergestellt wird.

Theorem 5.2

Sei X eine endliche, nicht leere Menge und $\mathcal{B} \subseteq 2^X, \mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Ferner sei eine Relation $\succsim$ auf X gegeben und die azyklische Relation $\succ$ gehe aus $\succsim$ durch die Definition

$$x \succ y \Leftrightarrow \neg(x \succsim y) \wedge \neg(y \succsim x)$$

hervor. Dann gibt es eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, die von $\succsim$ rationalisiert wird.

Beweis

Gilt für alle Elemente x,y von X: $\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x)$, so können wir für jedes $B \in \mathcal{B}$ $h(B) = B$ setzen.

Gäbe es in einer beliebigen Menge $B \in \mathcal{B}$ kein maximales Element, so könnten wir mittels der Definition 2.3 auf

(1) $(\forall y \in B)(\exists z \in B)[z \succ y]$

schließen. Da aber X endlich ist, kann B auch nur endlich sein, so daß aus (1) die Zyklizität von $\succ$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d.

Im folgenden Satz wird nicht verlangt, daß X endlich ist.

Theorem 5.3

Sei X eine beliebige nicht leere Menge von Alternativen. Ferner enthalte $\mathcal{B}$ alle nicht leeren, endlichen Teilmengen von X. Existiert eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ und wird h durch $\succsim$ rationalisiert, so ist die Relation $\succ$, die wie in Theorem 5.2 definiert wird, azyklisch.

Beweis

Nehmen wir an, $\succ$ wäre zyklisch, d.h.

(1) $(\exists k \geqq 2)(\exists x^1,..,x^k)[x^1 \succ x^2 \wedge \ldots \wedge x^{k-1} \succ x^k \wedge x^k \succ x^1]$.

Da nach Voraussetzung $B^0 = \{x^1,\ldots,x^k\} \in \mathcal{B}$, kann wegen (1) kein maximales Element in B^0 existieren, und wir erhalten einen

Widerspruch zu der vorausgesetzten Rationalität von h.

Im folgenden Satz werden Bedingungen für die Existenz einer AWK in einem topologischen Raum aufgestellt. Um jene exakt formulieren zu können, werden zunächst einige weitere Definitionen eingeführt.

Definition 5.2

Sei Ω ein Hausdorffscher[1] Raum. Dann heißt die Relation $\succsim\ \subseteq \Omega\times\Omega$ "von oben halbstetig", wenn für jedes $x^0\in\Omega$ die Menge $\{x \mid x\in\Omega \wedge x \succsim x^0\}$ abgeschlossen in Ω ist. $\succsim$ heißt "von unten halbstetig", wenn für jedes $x^0\in\Omega$ die Menge $\{x \mid x\in\Omega \wedge x^0 \succsim x\}$ abgeschlossen in Ω ist. $\succsim$ heißt "stetig", wenn sie von oben und von unten halbstetig ist.

Anmerkung 5.1

Die Menge $\{x \mid x\in\Omega \wedge x^0 \succ x\}$ ist genau dann offen in Ω, wenn $\{x \mid x\in\Omega \wedge x \succsim x^0\}$ abgeschlossen in Ω ist. Ebenso gilt, daß $\{x \mid x\in\Omega \wedge x \succsim x^0\}$ nur dann eine abgeschlossene Menge in Ω ist, wenn $\{x \mid x\in\Omega \wedge x^0 \succ x\}$ offen in Ω ist.

In Theorem 5.5 wird eine Behauptung von Uzawa (1956) unter schwächeren Bedingungen bewiesen.

In diesem wie in den folgenden Sätzen ist ein fundamentaler Satz über kompakte Mengen von zentraler Bedeutung. Dieser heißt:

Theorem 5.4

Sei X eine kompakte Menge. Ferner sei für irgendeine Indexmenge I $\{C_i\}, i\in I$, eine Klasse von abgeschlossenen Teilmengen von X. Gilt für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \{C_i\}_{i\in I}$, daß ihr Durchschnitt nicht leer ist, so folgt auch, daß $\bigcap\limits_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

Beweis zu dem obigen Satz kann bei Sonnenschein (197 a, S. 217) nachgelesen werden.

1) Ein topologischer Raum X heißt Hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte von X verschiedene Umgebungen besitzen.

Theorem 5.5

Sei $\succsim$ eine von oben halbstetige, transitive und vollständige Relation auf dem Hausdorffschen Raum X

Dann existiert eine bzgl. $\succsim$ rationale AWK auf einer Menge $\mathcal{B}^o$ von nicht leeren und kompakten Teilmenge von X derart, daß für alle $B \in \mathcal{B}$, h(B) kompakt ist.

Beweis

Sei B^o eine kompakte, nicht leere Teilmenge von X. Es ist zu zeigen:

$$(\exists x^o \in B^o)(\forall x \in B^o)[x \in B^o \Rightarrow x^o \succsim x] \quad .$$

Für beliebiges $x \in B^o$ bezeichne

$$R(x;B^o) := \{y \mid y \in B^o \wedge y \succsim x\} \quad .$$

Um das Theorem 5.4 anwenden zu können, wollen wir zunächst zeigen, daß für jedes $s \in \mathbb{N}$ und für beliebige $x^1,\ldots,x^s \in B^o$:

$$R(x^1;B^o) \cap R(x^2;B^o) \cap \ldots \cap R(x^s;B^o) \neq \emptyset.$$

Da B^o nicht leer und $\succsim$ vollständig ist, folgt für s=1:

$x^1 \succsim x^1$ und daher auch $R(x^1,B^o) \neq \emptyset$. Ist s=2, so gilt $x^1 \succsim x^2$ oder $x^2 \succsim x^1$, so daß also $R(x^1,B^o) \cap R(x^2,B^o) \neq \emptyset$.

Wir nehmen nun an:

$$(\forall k<s)(\exists \bar{x})[\bar{x} \in R(x^1;B^o) \cap R(x^2;B^o) \cap .. \cap R(x^k;B^o)] \quad .$$

Es sind zwei Möglichkeiten zu überprüfen:

1. Fall: $\bar{x} \succsim x^s$. Hieraus folgt $\bar{x} \in \bigcap_{i \leq s} R(x^i;B^o)$.

2. Fall: $\neg(\bar{x} \succsim x^s)$, bzw. da $\succsim$ vollständig ist, $x^s \succ \bar{x}$. Da $\bar{x} \in \bigcap_{i \leq k < s} R(x^i;B^o)$, erhalten wir sofort mit der Transitivität von $\succsim$:

$$(\forall i \leq k < s)[x^s \succsim x^i] \quad ,$$

so daß $x^s \in \bigcap_{i \leq k \leq s} R(x^i;B^o)$. Also gilt $\bigcap_{i \leq k \leq s} R(x^i;B^o) \neq \emptyset$. Dieses

Ergebnis gewinnen wir für jedes s und jedes k. Da nach Voraussetzung B^o kompakt und für alle $x \in B^o$, $\{z \mid z \in X \wedge z \succsim x\}$ abgeschlossen ist, ist auch $R(x;B^o)$ für alle $x \in B^o$ abgeschlossen. Wir können deshalb Theorem 5.4 anwenden und erhalten das Ergebnis $\bigcap_{x \in B^o} R(x;B^o) \neq \emptyset$. Es gilt demnach:

$$(\exists x^o \in \bigcap_{x \in B^o} R(x;B^o))[(\forall y \in B^o)[x^o \succsim y]] \wedge$$

$$(\forall z \in \bigcap_{x \in B^o} R(x;B^o))[(\forall y \in B^o)[z \succsim y]] \quad .$$

Erklären wir eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ dadurch, daß für jede Budgetmenge B^o die Auswahlmenge $h(B^o)$ nur aus den bezüglich $\succsim$ besten Elementen von B^o besteht, so ist klar, daß h rational bezüglich $\succsim$ ist.

Da für alle $x \in B^o$ die Menge $R(x;B^o)$ abgeschlossen ist und der Durchschnitt einer beliebigen Familie von abgeschlossenen Mengen ebenfalls abgeschlossen ist, folgt hieraus, daß auch $\bigcap_{x \in B^o} R(x;B^o)$ abgeschlossen ist. Deshalb ist, gemäß der Konstruktionsvorschrift unserer AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, die Menge $h(B^o)$ für jedes $B^o \in \mathcal{B}$ eine abgeschlossene Menge.

q.e.d.

Betrachten wir den obigen Satz genauer, so erkennen wir leicht, daß in dem zugehörigen Beweis die Abgeschlossenheit der Menge $\{x \mid x \succsim x^o\}$ eine zentrale Rolle spielt. Das gleiche gilt auch für das folgende Theorem, das im wesentlichen auf Mukherji (1977) zurückgeht.

Für die folgenden Definitionen setzen wir eine nicht leere Menge X und eine Relation $\succsim$ auf X voraus.

Definition 5.3

Die Menge $\{x^1,\dots,x^m\} \subseteq X$ bildet einen "$\succ$-Zyklus von der Länge m" genau dann, wenn $x^1 \succ x^2 \succ \dots \succ x^m \succ x_1$.

Definition 5.4

Sei $\succ$ eine Relation auf X.
Eine endliche Menge $\{x^1,\dots,x^m\} \subseteq A \subseteq X$ wird "in A dominiert",

wenn es ein $y \in A$ gibt mit: $y \succsim y \wedge y \succsim x_j$ für alle $j = 1,\ldots,m$.

Definition 5.5

Ein $\succ$-Zyklus $\{x^1,\ldots,x^m\} \subseteq A \subseteq X$ wird "azyklisch in A dominiert" genau dann, wenn ein $y \in A$ existiert, derart, daß y die Menge $\{x^1,\ldots,x^m\}$ dominiert und selbst kein Element eines $\succ$-Zyklusses in A ist.

Theorem 5.6

Sei X ein beliebiger Hausdorffscher Raum und $\mathcal{B}^o$ eine nicht leere Menge von nicht leeren kompakten Teilmengen von X. Gegeben sei ferner eine Relation $\succsim$ auf X und für alle $x \in X$ sei $C(x) = \{y \mid y \in X \wedge y \succsim x\}$ abgeschlossen in X. Dann, und nur dann, existiert eine bzgl. $\succsim$ b-rationale AWK $h: \mathcal{B}^o \to 2^X$, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}^o$ jede endliche Teilmenge S von B in B dominiert wird.

Beweis

Wenn h b-rational bzgl. $\succsim$ ist, so folgt für alle $B \in \mathcal{B}$ und $x \in h(B)$:

$$(\forall y \in B)[x \succsim y] \quad .$$

Insbesondere gilt das auch für jede endliche Teilmenge von B.

Um die umgekehrte Richtung der Behauptung nachzuprüfen, betrachten wir eine beliebige Menge $B^o \in \mathcal{B}$ und eine beliebige nicht leere endliche Teilmenge $\{x^1,\ldots,x^m\}$ von B^o. Die Voraussetzungen implizieren, daß die Menge $R(x;B^o) = \{y \mid y \in B^o \wedge y \succsim x\}$ ebenfalls abgeschlossen in B^o ist. Da $\{x^1,\ldots,x^m\}$ in B^o dominiert wird, gibt es ein $\tilde{y} \in B^o$ mit der Eigenschaft $\tilde{y} \succsim \tilde{y} \wedge \tilde{y} \succsim x^j$, für $j = 1,\ldots,m$, so daß $\tilde{y} \in \bigcap_{j=1}^{m} R(x^j;B^o)$. Auf diese Weise erhalten wir für alle $m \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{j=1}^{m} R(x^j;B^o) \neq \emptyset$. Wir können dann wieder Theorem 5.4 anwenden und erhalten $\bigcap_{x \in B^o} R(x;B^o) \neq \emptyset$. Die AWK kann dann wie im Theorem 5.5 erklärt werden.

Auch die Bedingungen des folgenden Theorems gewährleisten die Existenz einer Auswahlkorrespondenz. Zur Vorbereitung führen wir folgende Definitionen ein.

Definition 5.6

Sei $<y^j_{j\leqq k}>$ eine Folge von Alternativen aus X. $<y^j_{j\leqq k}>$ heißt "$\succsim$-monoton", wenn für alle $j<k$ gilt: $y^{j+1} \succsim y^j$.

Definition 5.7

Zwei Alternativen y und z heißen $\succsim$-konnex, wenn es zu jeder beliebigen Zahl N eine $\succsim$-monotone Folge $<y^n>$ gibt mit: $y^{n+1} \succ y^n$ für $n=1,\ldots,N-1$, $y^1 = y$, $y^k \neq y^i$ für $i<k = 2,\ldots,N$, und $\lim\limits_{v\to\infty} y^v = z$.

Definition 5.8

Eine Menge $\{x^1,\ldots,x^k\} \subseteq B$ wird "in B strikt dominiert" genau dann, wenn in B ein y existiert mit folgenden Eigenschaften:

1) y dominiert die Menge $\{x^1,\ldots,x^k\}$ azyklisch und
2) es gibt ein $j \leqq k$ mit $y \succ x^j$.

Theorem 5.7

Sei $<X,d>$ ein metrischer Raum mit der durch die Metrik d induzierten natürlichen Topologie.[1] Ferner sei eine vollständige Relation $\succ$ auf X gegeben und für keine Alternative $z \in X$ sei das Paar (z,z) $\succsim$-konnex. Besteht $\mathcal{B}$ nur aus den kompakten Teilmengen ($\neq \emptyset$) von X, so existiert eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ jeder $\succ$-Zyklus aus B in B strikt dominiert wird.

---

1) Unter einer durch die Metrik d induzierten natürlichen Topologie verstehen wir die Menge der offenen Umgebungen $U_\varepsilon(x^o) = \{x \mid x \in X \wedge d(x,x^o) < \varepsilon\}$ für jedes $x^o \in X$.
Mit $d(x,x^o)$ wird der Abstand der Punkte x und x^o bezeichnet.

Beweis

Sei $C(x) = \{z | z \in X \wedge z \succsim x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Da die Relation $\succsim$ vollständig ist und jeder $\succ$-Zyklus aus B in B strikt dominiert wird, wird auch jede endliche Teilmenge von B in B strikt dominiert (vgl. Mukherji (1977), Lemma 2). Hieraus folgt für jede Budgetmenge $B \in \mathcal{B}$, für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für jede Teilmenge $\{x^1, \ldots, x^m\} \subseteq B$ $\overline{\bigcap_{j=1}^{m} R(x^j;B)} \neq \emptyset$.[1] Deshalb können wir wieder das fundamentale Theorem 5.4 anwenden und erhalten $\bigcap_{x \in B} \overline{R(x;B)} \neq \emptyset$. Es gibt daher ein $y^0 \in \bigcap_{x \in B} \overline{R(x;B)}$.

Aus $y^0 \in \overline{R(x;B)}$ folgt jedoch nicht, daß auch $y^0 \in R(x;B)$; d.h. es muß nicht der Fall eintreten, daß für alle $x \in B$ die Bedingung $y^0 \succsim x$ zutrifft. Angenommen, es gäbe ein $z^1 \in B$ mit $\neg(y^0 \succsim z^1)$, so daß also wegen der Vollständigkeit von $\succsim$ die Beziehung $z^1 \succ y^0$ zutrifft. Ist z^1 ein bestes Element in B, so können wir $z^1 \in h(B)$ setzen. Ist jedoch z^1 kein bestes Element in B, so gibt es ein $z^2 \in B$ mit $z^2 \succ z^1$. Ist z^2 bestes Element in B, so können wir $z^2 \in h(B)$ setzen. Andernfalls fahren wir auf diese Art schrittweise fort und erhalten eine Folge $\langle z^j_{j=1,\ldots,N} \rangle$ mit $z^{i+1} \succ z^i$ für alle $i < N$.

Ergibt sich bei einem Konstruktionsschritt für irgendein $s \leqq N$ und $1 \leqq s < k$ $z^k = z^s$, so bildet die Menge $\{z^{k-1}, \ldots, z^s\}$ einen $\succ$-Zyklus. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $w \in B$ derart, daß die Menge $\{z^{k-1}, \ldots, z^s\}$ strikt dominiert. Aus diesem Grunde gibt es ein r, $k-1 \geqq r > s$, mit $w \succ z^r$, und für alle $i, k-1 \geqq i \geqq s$, trifft $w \succsim z^i$ zu. Indem wir z^{r+1} durch w ersetzen und anschließend wieder in z^{r+1} umbenennen, erhalten wir schließlich, daß alle z^j für $k-1 \geqq j \geqq r+1$ paarweise verschieden sind. Fahren wir dann in der oben beschriebenen Weise mit der Konstruktion der Folge fort, so erhalten wir schließlich eine Folge $\langle z^j_{j=1,\ldots,N} \rangle$, deren Glieder paarweise voneinander ver-

[1] $\overline{A}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle einer Menge A.

schieden sind und für die $z^{j+1} \succ z^j$, $j = 1,\dots,N-1$, gilt.

Sei nun $\langle x^v \rangle$ eine unendliche Folge in B derart, daß $x^v = z^v$ für $v = 1,\dots,N$ und $x^{N+k} \in U_{\frac{1}{N+k}}(y^o) \cap R(x^{N+k-1};B)$. Da für jedes N eine solche Folge $\langle x^v \rangle$, die $\succsim$-monoton ist und für die $\lim_{v\to\infty} x^v = y^o$ gilt, gebildet werden kann, ist das Paar (y^o,y^o) $\succsim$-konnex, im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb gilt $y^o \succsim x$ für alle $x \in B$, und wir können die Auswahlkorrespondenz so definieren, daß für jedes $B \in \mathcal{B}$ die Auswahlmengen nur aus den bezüglich $\succsim$ besten Elementen bestehen.

q.e.d.

Theorem 5.8

Sei $\langle X,d \rangle$ ein metrischer Raum mit der durch die Metrik induzierten natürlichen Topologie und $\succsim$ eine vollständige Relation auf X. $\mathcal{B}$ sei wie im Theorem 5.7 bestimmt.

Es gelte ferner

(a) $(\forall x,y,z \in X)\ [x \succ y \wedge y \sim z \Rightarrow x \succ z]$.

(b) Für keine Alternative $v \in X$ sei das Paar (v,v) $\succsim$-konnex.

(f) Jeder $\succ$-Zyklus von $B \in \mathcal{B}$ wird in B azyklisch dominiert.

Dann gibt es eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, die bezüglich $\succsim$ rational ist.

Beweis

Sei $A = \{x^1,\dots,x^k\} \subseteq B$ eine endliche Menge. Gibt es ein bestes Element $\tilde{y} \in A$, so dominiert $\tilde{y}$ die Menge A in B. Andernfalls gibt es mindestens einen $\succ$-Zyklus Z^1 in A. Nach Voraussetzung gibt es dann ein y^1 in B, das Z^1 dominiert und selbst kein Glied eines $\succ$-Zyklusses ist. Infolgedessen können wir mit Hilfe der Voraussetzungen (a) und (f) darauf schließen, daß y^1 einen anderen, ebenfalls vorhandenen, $\succ$-Zyklus $Z^2 \subseteq A$ azyklisch dominiert oder es trifft für alle $z \in Z^2$ $z \succ y^1$ zu. Da aber auch Z^2 von einem Element y^2 dominiert wird, gilt $y^2 \succsim y^1$ oder

$y^1 \succsim y^2$. Sind außer Z^1 und Z^2 noch weitere $\succ$-Zyklen in A vorhanden, so kann, wie soeben beschrieben, eine Rangfolge zwischen den dominierenden Elementen, die selbst keinen $\succ$-Zyklus bilden, festgelegt werden, und es gibt ein maximales Element x^0 in dieser Menge der dominierenden Elemente. Kann irgendein Element $\hat{z}$ der Menge A, die nach Fallannahme kein bestes Element besitzen soll, nicht in einen $\succ$-Zyklus eingegliedert werden, so gilt, wie einfache Überlegungen zeigen, $x^0 \succsim \hat{z}$.

Da für jede endliche Teilmenge von B ein solches dominierendes Element x^0 gefunden werden kann, können wir wieder das bereits mehrfach angewandte Theorem 5.4 benutzen und erhalten
$\bigcap_{x \in B} \overline{R(x;B)} \neq \emptyset$.

Sei $y^0 \in \bigcap_{x \in B} \overline{R(x;B)}$. Angenommen, y^0 ist nicht ein bestes Element von $R(x;B)$, dann können wir wie im Theorem 5.7 fortfahren, und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung (f).

Korollar 5.1

Ist die Relation $\succsim$ transitiv und setzen wir alle anderen Bedingungen von Theorem 5.8 außer (a) voraus, so existiert eine AWK, die $\succsim$ rationalisiert.

Beweis

Es genügt, die Bedingung (a) von Theorem 5.8 zu überprüfen. Sei deshalb $x \succ y \wedge y \sim z$ vorgegeben, so daß per definitionem $x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x)$ gilt. Angenommen $\neg(x \succ z)$, so daß also wegen der Vollständigkeit von $\succsim$ die Beziehung $z \succsim x$ folgt. Da von $y \sim z$ auf $y \succsim z$ geschlossen werden kann, führt dies zusammen mit $z \succsim x$ auf $y \succsim x$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

q.e.d.

Im Beweis des nächsten Theorems findet ein interessantes Resultat über konvexe Mengen Verwendung. Dieses von Helly (1921) gefundene Ergebnis weist auf eine verblüffende Eigenschaft des n-dimensionalen Euklidischen Raumes hin.

Theorem 5.10 Satz von Helly[1]

Gegeben sei eine endliche Familie $\mathfrak{A}$ von N, $N \geqq n+1$, konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$. Ferner sei für jede Teilmenge $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{T}| = n+1$, $\bigcap_{S \in \mathfrak{T}} S \neq \emptyset$. Dann folgt hieraus, daß $\bigcap_{S \in \mathfrak{A}} S \neq \emptyset$.

Dieses Resultat wollen wir nun im nächsten Satz verwenden.

Theorem 5.11

Gegeben sei eine Relation $\succsim$ auf dem $\mathbb{R}^n_+$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ sei $C(x) = \{y | y \in X \wedge y \succsim x\}$ konvex und abgeschlossen[2] in $\mathbb{R}^n_+$. $\mathcal{B}^o$ sei die Menge der kompetitiven[3] Budgetmengen, d.h. Mengen der Form $\{x | x \in \mathbb{R}^n_+ \wedge px \leqq M\}$ für $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M \in \mathbb{R}_+$. Ferner gebe es für jedes $B \in \mathcal{B}^o$ und für jede endliche Teilmenge S von B mit $|S| = n+1$ ein $x^o \in B$ mit $x^o \succsim x^i$, wobei $x^i \in S$ und $i = 1, \ldots, n+1$. Dann existiert eine AWK $h: \mathcal{B}^o \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$, die bezüglich der Relation $\succsim$ rational ist.

Beweis

1. Teil

Sei $B^o \in \mathcal{B}^o$, $\{x^1, \ldots, x^m\} \subseteq B^o$ und $m \geqq n+1$. Betrachten wir die Mengen $R(x^i; B^o) = \{y | y \in B^o \wedge y \succsim x^i\}$, $i \leqq m$, so folgt aus den Voraussetzungen dieses Satzes, daß für jedes $i \leqq m$ auch $R(x^i; B^o)$ konvex ist. Nach Voraussetzung gibt es für jede Teilmenge $A = \{x^{j_1}, \ldots, x^{j_{n+1}}\} \subseteq \{x^1, \ldots, x^m\}$ ein $\tilde{x}^j \in B^o$ derart, daß $\tilde{x}^j \in \bigcap_{i \leqq n+1} R(x^{j_i}; B^o)$. Mit dem Satz von Helly können wir dann auf die Existenz eines $x^o \in B^o$ mit $x^o \in \bigcap_{j=1,\ldots,m} R(x^j; B^o)$ schließen.

---

[1] vgl. dazu auch Eggleston (1977, S. 33-34).

[2] Ist eine Relation $\succsim$ auf X gegeben und gilt ferner, daß für ein $x^o \in X$ die Menge $\{y | y \in X \wedge y \succsim x^o\}$ abgeschlossen in X ist, so sagen wir auch, daß die Relation in x^o "von oben halbstetig" ist. Entsprechend heißt eine Relation $\succsim$ "von unten halbstetig" in x^o, wenn die Menge $\{y | y \in X \wedge x^o \succsim y\}$ abgeschlossen in X ist. Eine Relation heißt stetig in x^o, wenn sie von oben und von unten halbstetig in x^o ist. Sie heißt stetig auf X, wenn sie für alle $x \in X$ stetig in x ist.

[3] Budgetmengen der Form $\{x | px \leqq M\}$ heißen in Anlehnung an die angelsächsische Literatur auch "kompetitive Budgetmengen".

2. Teil

Ist $m < n+1$, so läßt sich zu der Menge $\{x^1, \ldots, x^m\} \subseteq B^o$ stets eine endliche Teilmenge $A \subseteq B^o$ mit $|A| \geq n+1$ und $\{x^1, \ldots x^m\} \subseteq A$ finden. Da nach Teil 1 für alle $x^v \in A$ ein $x^o \in B^o$ mit $x^o \succsim x^v$ existiert, trifft das insbesondere auch für $x^1, \ldots x^m$ zu, so daß wir auch in diesem Fall $\bigcap_{i \leq m} R(x^i; B^o) \neq \emptyset$ erhalten.

3. Teil

B^o ist eine kompakte Menge. Das gleiche gilt auch für $R(x;B^o)$ für $x \in B^o$. Außerdem wurde in den Teilen 1 und 2 dieses Beweises bereits gezeigt, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für beliebige Alternativen $x^1, \ldots, x^m \in B^o$ $\bigcap_{j \leq m} R(x^j, B^o) \neq \emptyset$. Damit gibt es nach Theorem 5.4 ein $x^o \in \bigcap_{x \in B^o} R(x^j, B^o)$, und wir können auf analoge Weise wie in den vorangehenden Beweisen eine bezüglich der Relation $\succsim$ rationale AWK konstruieren. q.e.d.

Es soll nun noch der Beweis dafür erbracht werden, daß die unter den Voraussetzungen des Theorems 5.10 erhaltene AWK $h: \mathcal{L}^o \to 2^X$ für jedes $(p^o, M^o) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ von oben halbstetig ist, falls die Menge $C^{-1}(x) = \{y \mid y \in X \wedge x \succsim y\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n_+$ ist. Aus diesem Grunde führen wir folgende Begriffe ein:

(vgl. G. Debren: Existence of Competive Equibibrium in Handbook of Mathematical Economics Volume 2 (S. 698 und 701))

Definition 5.9

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : A \to B$ eine Korrespondenz. Ferner sei $x^o \in A$.

1) $\psi: A \to$ heißt "von oben hemi stetig" in x^o genau dann, wenn es eine Umgebung von x^o, in der ψ beschränkt ist und für jede beliebige Folge $\langle x^q \rangle$ in A mit $\lim_{q\to\infty} x^q = x^o$ und für jede Folge $\langle y^q \rangle$ in B mit $y^q \in \psi(x^q)$ und $\lim_{q\to\infty} y^q = y^o \in B$ folgt, daß $y^o \in \psi(x^o)$.

2) $\psi:A\to B$ heißt "von unten hemistetig" in x^0 genau dann, wenn $y^0\in\psi(x^0)$ und wenn für jede beliebige Folge $<x^q>$ in A mit $\lim_{q\to\infty} x^q=x^0$ eine Folge $<y^q>$ in B existiert derart, daß

$y^q\in\psi(x^q)$ und $\lim_{q\to\infty} y^q=y^0$

3) $\psi:A\to B$ heißt "stetig" in x^0, wenn ψ von oben und von unten hemistetig in x^0 ist.

Korollar 5.2

Wird zu den Hypothesen von Theorem 5.11 noch die Voraussetzung:

$C^{-1}(x)=\{y|y\in X\wedge x\succsim y\}$ ist abgeschlossen in $\mathbf{R}^n_+$ für alle $x\in\mathbb{R}^n_+$

hinzugenommen, so existiert eine AWK $h:\mathcal{B}^0\to 2^{\mathbf{R}^n_+}$, die von oben hemistetig und bezüglich der Relation $\succsim$ rational ist.
Beweis: Sei (p^q,M^q) eine beliebige Folge aus dem $\mathbf{R}^{n+1}_{++}$ mit $\lim_{q\to\infty} (p^q,M^q)=(p^0,M^0)\in\mathbf{R}^n_{++}\times\mathbf{R}_+$. Ferner sei $<y^q>$ eine Folge aus $\mathbf{R}^n_+$ mit $y^q\in h(p^q,M^q)$ und $\lim_{q\to\infty} y^q=\tilde{y}\in\mathbf{R}^n_+$. Es ist zu zeigen, daß $\tilde{y}\in h(p^0,M^0)$.

Angenommen $\tilde{y}\notin h(p^0,M^0)$. Von $p^q\cdot y^q\leq M^q$ können wir auf $p^0\tilde{y}\leq M^0$ schließen. Daher gilt $\tilde{y}\in B(p^0,M^0)$.
Aufgrund von $h(p^0,M^0)\neq\emptyset$ gibt es ein $z^0\in h(p^0,M^0)$ derart, daß $\neg(\tilde{y}\succsim z^0)$. Da die Mengen $C(z^0)$ und $C^{-1}(\tilde{y})$ abgeschlossen sind, müssen die Komplementärmengen dieser Mengen offen sein. Daher gibt es $\varepsilon',\varepsilon''>0$ mit der Eigenschaft:

(1) $(\forall y\in U_{\varepsilon'}(\tilde{y}))(\forall z\in U_{\varepsilon''}(z^0))\ [\neg(y\succsim z)]$.

Die Ungleichung $p^0z^0\leq M^0$ führt auf $\lim_{q\to\infty} p^q\cdot z^0\leq\lim_{q\to\infty} M^q$. Deshalb existiert eine natürliche Zahl $N(\varepsilon'')$ mit der Eigenschaft, daß für alle $q>N(\varepsilon'')$ $B(p^q,M^q)\cap U_{\varepsilon''}(z^0)\neq\emptyset$ zutrifft. Ebenso gibt es ein $N(\varepsilon')$ derart, daß für alle $q>N(\varepsilon')$ $y^q\in U_{\varepsilon'}(\tilde{y})$. Wählen wir $N=\max\{N(\varepsilon'), N(\varepsilon'')\}$, so ist für alle $q>N$ $y^q\in U_{\varepsilon'}(\tilde{y})$ erfüllt, und es gibt ferner für jedes $q>N$ ein $\tilde{x}^q \varepsilon B(p^q,M^q) \cap U_{\varepsilon''}(z^o)$. Dieses Ergebnis führt mit (1) auf $\neg(y^q \succsim \tilde{x}^q)$. Aber $y^q \varepsilon h(p^q,M^q)$ und h ist rational bezüglich der Relation $\succsim$, so daß hieraus $y^q \succsim \tilde{x}^q$ folgt, was im Widerspruch zu dem vorangehenden Ergebnis steht. Damit haben wir die Annahme zu verwerfen und erhalten $\tilde{y} \varepsilon h(p^o,M^o)$.

Anmerkung 5.2

Durch das obige Theorem wurde nachgewiesen, daß die Transitivität der Präferenzrelation nicht vorausgesetzt werden muß, um eine rationale AWK konstruieren zu können. Dies hat zur Folge, daß "rational handeln" nicht mit "transitiv handeln" gleichzusetzen ist.
Mit diesem Problem hat sich schon Sonnenschein (1971 a) auseinandergesetzt. Er konnte als erster nachweisen, daß zu einer gegebenen Relation $\succsim$ eine Auswahlkorrespondenz auch dann existiert, wenn diese Relation nicht transitiv ist. Sonnenschein setzt aber auch die Vollständigkeit der Relation $\succsim$ voraus. Diese Forderung haben wir in Theorem 5.10 vermieden, indem wir an ihre Stelle die Voraussetzung setzen, daß jede n+1 - elementige Teilmenge der Budgetmengen B von einem Element $x \varepsilon B$ dominiert wird.

Im nächsten Theorem wird das Ergebnis von Sonnenschein (1971, Theorem 4) ohne Beweis wiederholt. Um dieses in angemessener Weise formulieren zu können, definieren wir noch die Mengen S^1 und $\tilde{S}^1$:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Konsumraum und $\succsim$ eine Relation auf X,
$S^1 := \{(p,M) \varepsilon \mathbb{R}^{n+1} \mid p \varepsilon \mathbb{R}^n \wedge M \varepsilon \mathbb{R} \wedge (\exists x \varepsilon X \subseteq \mathbb{R}^n)[px \leq M]\}$,
$\tilde{S}^1 := \{(p,M) \varepsilon S^1 \mid ((\exists x \varepsilon X)[px \leq M] \wedge (\forall y \varepsilon X)[py \leq M]) \Rightarrow x \succsim y\}$.

Theorem 5.12

Sei X eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\succsim$ eine vollständige, von oben halbstetige Relation auf X. Ferner sei für alle $x \varepsilon X$ die Menge $P(x)=\{y \varepsilon X \mid y \succ x\}$ konvex. Dann gilt:

1) $S^1 = \tilde{S}^1$.

2) Es gibt eine Nachfragekorrespondenz $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to X$ mit
$h(p,M) = \{x \in X \mid px \leq M \wedge (\forall x' \in X)[px' \leq M \Rightarrow x \succsim x']\}$.

In den folgenden beiden, im wesentlichen auf Uzawa (1971,S.23-25) zurückgehenden Sätzen, beschränken wir uns wieder auf kompetitive Budgetmengen, d.h. auf Mengen der Form $B(p,M)=\{x \mid px \leq M\}$, wobei $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M \in \mathbb{R}_+$ oder $M \in \mathbb{R}_{++}$. Solche Budgetmengen werden in der Nachfragetheorie betrachtet, so daß auf diesem Gebiet das vorangehende und das unmittelbar folgende Theorem Verwendung finden.

Handelt es sich um Auswahlkorrespondenzen auf der Menge der kompetitiven Budgetmengen, so wollen wir diese fast immer Nachfragekorrespondenzen bzw. Nachfragefunktionen nennen. Anstelle von $h(B(p,M))$ werden wir zur Abkürzung auch häufig $h(p,M)$ schreiben.

Da der Beweis des sich anschließenden Theorems 5.13 im wesentlichen so verläuft wie derjenige zu Theorem 5.5, soll von einer Ausführung hier abgesehen werden (vgl. Uzawa (1971,S.23-24)).

Da unter den Voraussetzungen des nächsten Satzes die Nachfragefunktion das Starke Axiom erfüllt, müssen wir dieses Postulat zunächst für kompetitive Budgetmengen formulieren. Entsprechend werden dann auch die Relationen revealed vorgezogen (R) und indirekt revealed (R^*) definiert.

Definition 5.10

Sei $h\colon \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}^n_{+}$, $x=h(p,M)$, eine Nachfragefunktion.

$xRy :\Leftrightarrow (\exists(p,M))[x=h(p,M) \wedge py \leq px \wedge x \neq y]$.

$xR^*y :\Leftrightarrow xRy \vee (\exists x^1..x^k)[xRx^1 \wedge .. \wedge x^kRy]$.

Schwaches Axiom (WA'')

$xRy \Rightarrow \neg(yRx)$

Starkes Axiom (SA'')

$xR^*y \Rightarrow \neg(yR^*x)$

Theorem 5.13

Sei $\mathcal{L}^o$ die Menge aller Budgetmengen der Form $\{x\varepsilon \mathbb{R}^n_+ | px \leq M\}$ für $p\varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ und $M\varepsilon \mathbb{R}_{++}$. Ferner sei $\succ$ eine auf $\mathbb{R}^n_+$ erklärte Relation mit folgenden Eigenschaften:

P I : $\succ$ ist irreflexiv, d.h. $(\forall x\varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\neg(x\succ x)]$,

P II : $\succ$ ist transitiv ,

P III: $(\forall x,y\varepsilon \mathbb{R}^n_+)[x \geq y \Rightarrow x\succ y]$ [1] ,

P IV : $(\forall x,y\varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\neg(y\succ x) \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\succ y]$, $\forall\lambda\varepsilon]0,1[$

P V : $\{x\varepsilon \mathbb{R}^n_+ | y\succ x\}$ ist offen in $\mathbb{R}^n_+$ für alle $y\varepsilon \mathbb{R}^n_+$.

Dann gibt es eine Nachfragefunktion $h:\mathcal{L}^o\rightarrow \mathbb{R}^n_+$, $x=h(p,M)$, die die Budgetgleichung $p\cdot h(p,M)=M$ und das Starke Axiom (SA") erfüllt.

Den Beweis des folgenden, ebenfalls auf Uzawa zurückgehenden Satzes, wollen wir - etwas modifiziert - ausführen (vgl. (1971), S.24-25)

Theorem 5.14

Sei $\succ$ eine auf $\mathbb{R}^n_+$ erklärte Relation mit den Eigenschaften P I - P V und

P VI : $\forall z\varepsilon \mathbb{R}^n_+$: $\{x\varepsilon \mathbb{R}^n_+ | x\succ z\}$ ist offen in $\mathbb{R}^n_+$.

Dann gibt es eine bzgl. $\succ$ rationale Nachfragefunktion $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n_+$, $x=h(p,M)$, mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Budgetgleichung und das Starke Axiom (SA") erfüllt und stetig bezüglich p ist.

Beweis

Infolge von Theorem 5.13 genügt es nachzuweisen, daß für alle $x\varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ eine Preissituation (p,M) existiert und daß ferner h bezüglich p stetig ist.

Sei deshalb $x^o > 0$ vorgegeben. Wir zeigen zunächst, daß die Menge $\mathbb{V} := \{x | x\varepsilon \mathbb{R}^n_+ \wedge x\succ x^o\}$ konvex ist.

---

[1] $x \geqq y :\Leftrightarrow (\forall i \leqq n)\ [x_i \geqq y_i]$

$x \geq y :\Leftrightarrow (\forall i \leqq n)\ [x_i \geqq y_i \wedge \exists j \leqq n: x_j > y_j]$

$x > y :\Leftrightarrow (\forall i \leqq n)\ x_i > y_i$.

Für beliebige $x^1, x^2 \varepsilon \tilde{V}$, $x^1 \neq x^2$, gelte

(1) $x^1 \succ x^0 \wedge x^2 \succ x^0$

1\. Fall: $x^1 \succ x^2$. Hieraus kann wegen P I und P II nur $\neg(x^2 \succ x^1)$ folgen. Mit P IV kommen wir zu dem Ergebnis $((1-\lambda)x^1+\lambda x^2) \succ x^2$, für $0<\lambda<1$, so daß hiermit $((1-\lambda)x^1+\lambda x^2) \succ x^0$ gilt.

2\. Fall: Von $\neg(x^1 \succ x^2)$ können wir ebenfalls mit P IV und P II auf $((1-\lambda)x^1+\lambda x^2) \succ x^0$ schließen. Da nach Konstruktion von $\tilde{V}$ und wegen P I x^0 nicht Element von $\tilde{V}$ sein kann, folgt mit einem Separationstheorem über konvexe Mengen (vgl. Fenchel (1953), S.47):

(2) $(\exists \bar{p} \neq 0)(\forall x \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[x \varepsilon \tilde{V} \Rightarrow \bar{p} \cdot x \geq \bar{p} \cdot x^0]$.

Da ferner wegen P III für alle $x \geq x^0$ die Beziehung $x \succ x^0$ und damit $x \varepsilon \tilde{V}$ erfüllt ist, muß wegen (2) $\bar{p} \geq 0$ gelten.

Haben wir nachgewiesen, daß

(3) $(\forall x \varepsilon \tilde{V})[\bar{p}x > \bar{p}x^0]$

gilt, so gewinnen wir hieraus das Ergebnis $\bar{p} \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$.

Angenommen: $(\exists \bar{x} \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\bar{x} \varepsilon \tilde{V} \wedge \bar{p}\bar{x} = \bar{p}x^0]$, so daß also $\bar{x} \succ x^0$ folgt.

Infolge von P VI erhalten wir:

$(\exists U_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq \tilde{V})[\forall x \varepsilon U_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow x \succ x^0]$.

Da $\bar{p} \neq 0$, können wir auf

$(\exists x^1 \varepsilon U_\varepsilon(\bar{x}))[x^1 \succ x^0 \wedge \bar{p}x^0 > \bar{p}x^1]$

schließen. Das ist aber ein Widerspruch zu (2).

Aus (3) gewinnen wir nun:

$(\forall x \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\bar{p}x \leq \bar{p}x^0 \Rightarrow \neg(x \succ x^0)]$.

Wählen wir $M^0 = \bar{p} \cdot x^0$, so ist x^0 ein bezüglich $\succ$ maximales Element in $B(\bar{p}, M^0)$. Angenommen, es gäbe neben x^0 noch ein bezüglich $\succ$ maximales Element x^1 in $B(\bar{p}, M^0)$, so daß also $\neg(x^0 P x^1)$ zutreffen würde! Mit P IV erhielten wir für $z = \frac{x^0}{2} + \frac{x^1}{2}$ die Beziehung $z \succ x^0$, also einen Widerspruch zur Definition des maximalen Elementes. Definieren wir nun die Nachfragefunktion h durch

$x^0 = h(\bar{p}, M^0)$ für jedes $x^0 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$,

so ist h rational bezüglich der Relation $\succ$.

2. Um die Stetigkeit von h bzgl. p zu überprüfen, beweisen wir zunächst für beliebiges $(\bar{p},\bar{M})>0$ die Äquivalenz:

x^0 ist maximales Element in $B(\bar{p},\bar{M})$ bezüglich der Relation

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha) & \bar{p}x^0=\bar{M} \\ (\beta) & (\forall x\varepsilon\ \mathbb{R}^n_+)[x>0\wedge\bar{p}x^0>\bar{p}x \Rightarrow x^0\succ x] \end{cases}$$

1. Die Behauptung "$\Rightarrow$" ist offensichtlich wahr.
2. Beweis für "$\Leftarrow$": x^0 erfülle die Eigenschaften (α) und (β)! Es gilt daher, daß $x^0\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$. Für ein beliebig gewähltes $\bar{x}\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$ erhalten wir:

   $$(\exists \text{ Folge } \langle x^k\rangle)[x^k>0 \wedge \lim_{k\to\infty} x^k = \bar{x} \wedge \bar{p}x^0>\bar{p}x^k].$$

   Die Bedingung (β) führt zu $x^0\succ x^k$, so daß wegen P I und P II die Beziehung $\neg(x^k\succ x^0)$ erfüllt ist. P VI liefert dann sofort $\neg(\bar{x}\succ x^0)$. Deshalb ist x^0 in $B(\bar{p},\bar{M})$ ein bezüglich $\succ$ maximales Element.

Dieses Ergebnis versetzt uns nun in die Lage, die Stetigkeit von h bezüglich p beweisen zu können. Sei deshalb

(4) $\quad \langle p^v,M^v\rangle$ eine Folge mit $\lim\limits_{v\to\infty}(p^v,M^v)=(\bar{p},\bar{M})$.

Da die Budgetgleichung vorausgesetzt wurde, ist $\langle h(p^v,M^v)\rangle$ eine beschränkte, unendliche Folge, so daß nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $\langle h(p^{v_k},M^{v_k})\rangle$ von $\langle h(p^v,M^v)\rangle$ mit

$$\lim_{v_k\to\infty} h(p^{v_k},M^{v_k}) = \tilde{x}^0$$

existiert. Es wird nun nachgewiesen, daß x^0 die Bedingungen (α) und (β) der zuvor bewiesenen Äquivalenz erfüllt.

Zu (α): Da unter den Voraussetzungen dieses Satzes die Budgetgleichung erfüllt ist (vgl. Theorem 5.12), gilt:

$$p^{v_k}\ h(p^{v_k},M^{v_k}) = M^{v_k} \quad \text{und damit}$$
$$\bar{p}\cdot\tilde{x}^0 = \bar{M}\ .$$

Zu (β): Sei $\hat{x}$ ein beliebiges Element, für das die Ungleichung $p\hat{x}<\bar{M}$ gelte. Dann impliziert (4):

(5) $\quad (\exists N^0\varepsilon\ \mathbb{N})(\forall k)[v_k>N^0 \Rightarrow p^{v_k}\cdot\hat{x}<M^{v_k}]$.

Da h m-rational bezüglich $\succ$ ist und ferner

$h(p^{\nu k}, M^{\nu k}) \varepsilon B(p^{\nu k}, M^{\nu k})$, folgt mit (5)

$$\neg(\hat{x} \succ h(p^{\nu k}, M^{\nu k}))\ .$$

P V führt hiervon auf $\neg(\bar{x} \succ \tilde{x}^o)$. Also gilt

(6) $\quad (\forall x \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\bar{p}x < \bar{M} \Rightarrow \neg(x \succ \tilde{x}^o)]$.

(7) Annahme: $(\exists \tilde{x} \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\bar{p}\tilde{x} < \bar{M} \wedge \neg(\tilde{x}^o \succ \tilde{x})]$.

Hieraus folgt für $\tilde{\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}^o}{2} + \frac{\tilde{x}}{2}$ mit P IV $\tilde{\tilde{x}} \succ \tilde{x}^o$. Da $\bar{p}\tilde{\tilde{x}} = \frac{\bar{p}\tilde{x}^o}{2} + \frac{\bar{p}\tilde{x}}{2}$, können wir infolge unserer Annahme in (7) auf $\bar{p}\tilde{\tilde{x}} < \bar{M}$ schließen und erhalten einen Widerspruch zu (6).

q.e.d.

Anmerkung 5.3

Wie aus dem vorangegangenen Beweis hervorgeht, folgt aus P IV, daß in jeder Budgetmenge genau ein bezüglich $\succ$ maximales Element x existiert. Deshalb gewinnen wir aus den Voraussetzungen des obigen Satzes eine bezüglich $\succ$ rationale Funktion. Ohne P IV könnten wir jedoch nur eine bezüglich der Relation $\succ$ rationale Korrespondenz erklären.

Für die Formulierung des nächsten von W. Shäfer (1975) gefundenen Satzes ist die Einführung der folgenden beiden Definitionen sinnvoll.

Definition 5.11

Die kleinste konvexe Menge, in der eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ enthalten ist, heißt konvexe Hülle von X. Die konvexe Hülle einer Menge von Punkten $\{x_i\}_{i \varepsilon S}$, wobei S eine Indexmenge ist, werde mit $[x_i]_{i \varepsilon S}$ bezeichnet.

Definition 5.12

Sei P eine asymmetrische Relation auf $A \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Ferner sei $x \varepsilon A$ und $y \varepsilon \mathbb{R}^n_+$ und $x \neq y$. Dann gelte

$$x\hat{P}y \ :\Leftrightarrow\ (\exists p \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[px = 1 \wedge py \leq 1 \wedge (\forall z)[zPx \Rightarrow pz > 1]].$$

Mit $P(x^o)$ bezeichnen wir die Menge $\{x \mid x \varepsilon \mathbb{R}^n_+ \wedge xPx^o\}$ und mit $\hat{P}(x^o)$ die Menge $\{x \mid x \varepsilon \mathbb{R}^n_+ \wedge x\hat{P}x^o\}$.

Theorem 5.15

Sei P eine Relation auf dem IR^n_+ mit folgenden Eigenschaften:

(a) P ist asymmetrisch,

(b) $(\forall x,y\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_+)[(x\notin\overline{P(y)} \wedge (\exists\alpha\varepsilon]0,1[)[\alpha x+(1-\alpha)y\varepsilon P(x)]$

(c) Für alle $x\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_+$ gehört x selbst nicht zur konvexen Hülle von P(x),

(d) $(\forall x,y\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_+)[x\varepsilon\hat{P}(y)\Rightarrow x\varepsilon P(y)]$,

(e) $(\forall x,y\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_+)[x\varepsilon\overline{P(y)}\Rightarrow y\notin P(x)]$,

(f) $(\forall x\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_+)[P(x)\neq 0]$,

(g) $\hat{P}$ ist azyklisch.

Dann gibt es eine bezüglich P rationale Nachfragefunktion $h:\mathrm{IR}^n_{++}\times\{1\}\to\mathrm{IR}^n_+$, bzw. $h:\mathrm{IR}^n_{++}\to\mathrm{IR}^n_+$, die das Schwache Axiom (WA'') und die normierte Budgetgleichung

$$(\forall p\varepsilon\,\mathrm{IR}^n_{++})[p\cdot h(p)=1]$$

erfüllt.

Anmerkung 5.4

Die Bedingung (e) verhindert die Existenz einer Nutzenfunktion, der die folgende graphische Darstellung entspricht :

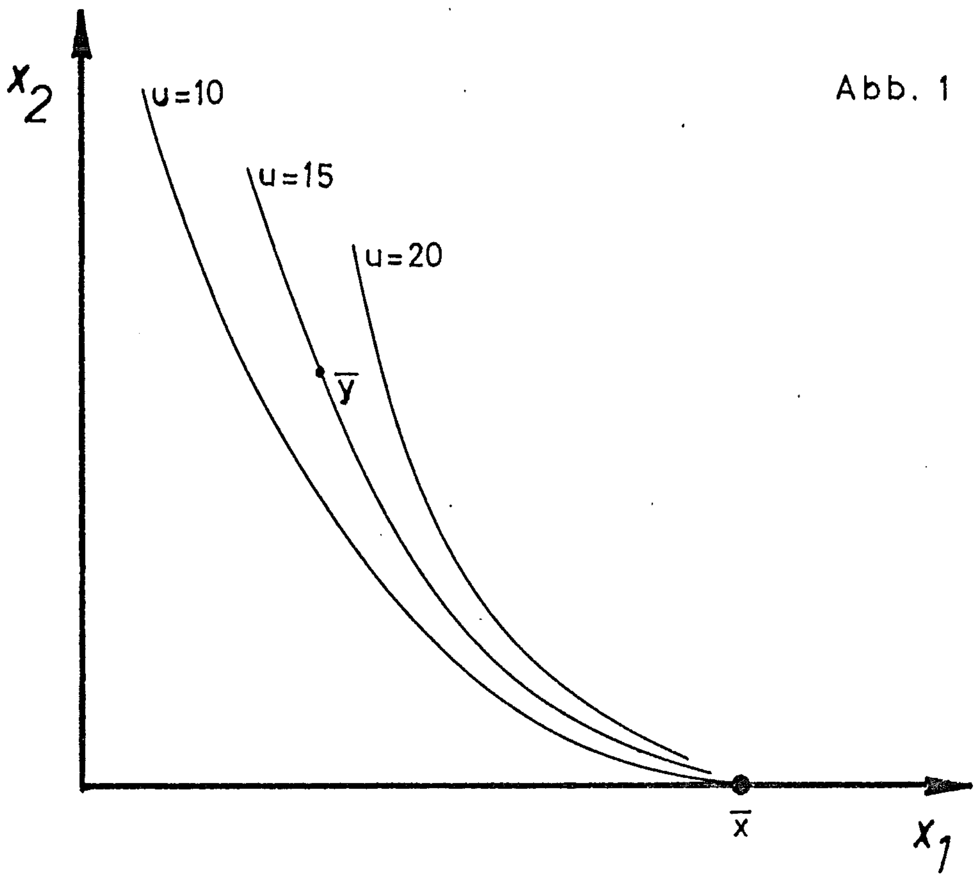


Abb. 1

Betrachten wir Abbildung 1 und nehmen wir an, $\bar{x}$ gehöre zu der Indifferenzkurve mit der Gleichung u=10 und zu keiner anderen, so gilt $\bar{x}\varepsilon\overline{P(\bar{y})}$ und $\bar{y}\varepsilon P(\bar{x})$. Dieser Fall wird jedoch durch die Voraussetzungen von Theorem 5.15 ausgeschlossen.

Wir beweisen nun Theorem 5.1 5

1. Teil: Zunächst wird nachgewiesen, daß für jede endliche, nicht leere Menge $\{x^1,..,x^m\}\subseteq \mathbb{R}^n_+$ die Bedingung

$$[x^j]_{j\leq m} \subseteq \bigcup_{j\leq m}\overline{P(x^j)}$$

zutrifft. Wir betrachten deshalb ein beliebiges $z\varepsilon[x^j]_{j\leq m}$ und nehmen an, für alle $j\leq m$ würde $z\notin\overline{P(x^j)}$ gelten. Diese Annahme führt mit Voraussetzung (b) für jedes $j\leq m$ auf ein $\alpha_j\varepsilon]0,1[$ mit der Eigenschaft $(\alpha_j z+(1-\alpha_j)x^j)Pz$. Da z nach Voraussetzung eine Konvexkombination[1] der x^j, für $j\leq m$, ist, muß z auch eine Konvexkombination der Punkte, die der Gleichung $\alpha_j z+(1-\alpha_j)x^j$ genügen, sein. Infolgedessen ist z Element der konvexen Hülle von P(z), im Widerspruch zu (c).

2. Teil: Wir zeigen nun:

$$\bigcap_{y\varepsilon B(p)} \overline{P(y)} \cap B(p) \neq \emptyset,$$

wobei B(p) die Menge $\{x|x\varepsilon\, \mathbb{R}^n_+ \wedge px\leq 1\}$ bezeichnet.
Nach Teil 1 dieses Beweises gilt für jedes $s\varepsilon\, \mathbb{N}$ und jede endliche Menge $\{y^1,..,y^s\}\subseteq B(p)$ die Beziehung $[y^i]_{i\leq s}\subseteq \bigcup_{i\leq s}\overline{P(y^i)}\cap B(p)$. Ferner ist $\overline{P(y^i)}\cap B(p)$ für alle $i\leq s$ eine abgeschlossene Menge, so daß wir wieder mit Theorem 5.4 auf

$$(1)\qquad \bigcap_{y\varepsilon B(p)} \overline{P(y)} \cap B(p) \neq \emptyset$$

schließen können.

3. Teil: Wegen unseres Ergebnisses in Zeile (1) gibt es ein $\bar{x}\ \varepsilon \bigcap_{y\varepsilon B(p)} \overline{P(y)} \cap B(p)$. Es soll nun folgendes gezeigt werden:

---

1) Für beliebiges $x^i\varepsilon X$, wobei $i\leq k$ und X ein linearer Raum ist, heißt $z=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i x^i$, $0\leq\gamma_i\leq 1$, eine "Konvexkombination" der x^i.

(a) $z \in P(\bar{x}) \Rightarrow pz>1$

(b) $p\bar{x} = 1$.

Sei $\bar{z} \in P(\bar{x})$, so folgt aus der Annahme $p\bar{z} \leq 1$ mit dem 2. Teil des Beweises, daß $\bar{x} \in \bar{P}(\bar{z})$. Deshalb können wir mit (e) auf $\bar{z} \notin P(\bar{x})$ schließen, so daß wir einen Widerspruch erhalten. Also gilt für alle $z \in P(\bar{x})$ die Beziehung $pz>1$. Hiervon können wir sofort für alle $z \in \overline{P(\bar{x})}$ auf die Beziehung $pz \geq 1$ schließen. Von $\bar{x} \in B(p)$ und $\bar{x} \in \overline{P(\bar{x})}$, gelangen wir dann zu $p\bar{x}=1$.

4. Teil: Es soll nun gezeigt werden, daß für beliebiges $y \in B(p)$ und $\bar{x} \neq y$ $\bar{x}Py$ zutrifft. Die Ergebnisse von Teil 3 führen jedoch sofort auf $\bar{x} \in \hat{P}(y)$ und mit (d) zu der Folgerung $\bar{x} \in P(y)$.

Nach Teil 4 wissen wir, daß nur $\bar{x}$ bezüglich der Relation P bestes Element in B(p) ist, so daß wir wieder $h(p)=\bar{x}$ setzen können und auf diese Weise zu einer bezüglich P rationalen Funktion gelangen, die nach Teil 3 die normierte Budgetgleichung $p \cdot \bar{x} = 1$ erfüllt.

Um das Schwache Axiom (WA'') zu überprüfen, betrachten wir x,y mit xRy. Dann gilt gemäß Definition 5.10

(2) $(\exists p \in \mathbb{R}^n_{++})[x=h(p) \wedge py \leq 1]$.

Da h rational bezüglich P ist, folgt aus der Annahme yRx auch yPx und mit Teil 3 dieses Beweises $py>1$, im Widerspruch zu (2).

Die Ergebnisse von §5 zusammenfassend soll festgehalten werden, daß zu gegebener Relation $\succsim$ auf einer Menge X unter diversen Bedingungen eine Auswahlkorrespondenz, die $\succsim$ rationalisiert, gefunden werden kann. Die Existenz einer solchen Auswahlkorrespondenz wird stets mit Hilfe der sogenannten finite intersection property über kompakte Mengen gewährleistet. Von zentraler Bedeutung sind diejenigen Ergebnisse, in denen auf die Existenz von Auswahlkorrespondenzen geschlossen werden kann, ohne daß die zugrundegelegte Präferenzvorstellung transitiv ist. Eine grundsätzliche, jedoch nicht mathematische Frage ist die, ob der Marktteilnehmer entsprechend seiner Präferenzvorstellung handelt und ob sein beobachtetes Verhalten auch tatsächlich mit der aus seiner Präferenzvorstellung deduzierbaren rationalen Auswahlkorrespondenz übereinstimmt. Im Rahmen dieser Abhandlung ist es jedoch nicht sinnvoll davon auszugehen, daß letzteres nicht zutrifft.

§6 Beziehungen zwischen Auswahlkorrespondenzen und rationalen Verhaltensregeln

6.1 Einfluß der Verhaltensregeln auf die Rationalisierbarkeit

In diesem Paragraphen wollen wir den Zusammenhang zwischen den rationalen Verhaltensregeln und den Eigenschaften der Auswahlkorrespondenzen untersuchen.

Wie durch das nachfolgende Lemma auf leichte Weise einzusehen ist, erfüllt jede bezüglich einer Relation $\succsim$ rationale Auswahlkorrespondenz h die Regel
(β): $B^1 \subseteq B^2 \Rightarrow [B^1 \cap h(B^2) \subseteq h(B^1)]$.

Lemma 6.1

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine beliebige Auswahlkorrespondenz und $\succ$ eine Relation auf X, durch die h rationalisierbar ist.
Dann erfüllt h auch die Auswahlregel (β).

Beweis

Seien $B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B}$ und $B^1 \subseteq B^2$. Für ein beliebiges $x \varepsilon B^1 \cap h(B^2)$ folgt dann:

(1) $(\forall y \varepsilon B^2)[\neg(y \succ x)]$.

Da $B^1 \subseteq B^2$, trifft (1) auch auf alle $y \varepsilon B^1$ zu, so daß x ein maximales Element von B^1 ist und infolgedessen zu $h(B^1)$ gehört.

Lemma 6.2

Ist $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK, die eine gegebene vollständige und transitive Relation $\succsim$ rationalisiert, so erfüllt h auch das Schwache Axiom (WA).

Beweis

Sei $x, y \varepsilon X$ mit $x\tilde{P}y$.
Angenommen es gelte yVx. Hieraus folgt dann nach Definition 3.3 $(\exists B^0 \varepsilon \mathcal{B})[y \varepsilon h(B^0) \wedge x \varepsilon B^0]$, so daß hiermit auch $y \succsim x$ erfüllt ist.
Da $x\tilde{P}y$ vorausgesetzt ist, erhalten wir

(1) $\quad (\exists B^1 \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon h(B^1) \wedge y \varepsilon B^1 \setminus h(B^1)]$.

Hiervon können wir auf

$$(\exists z \varepsilon B^1)[z \succ y]$$

schließen. Wir erhalten nun wegen der Transitivität und Vollständigkeit der Relation $\succeq$ $z \succ x$. Dann aber kann x wegen der vorausgesetzten Rationalität von h bzgl. $\succeq$ kein Element von $h(B^1)$ sein, im Widerspruch zu (1).

Lemma 6.3

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK, die bezüglich einer asymmetrischen und negativ transitiven [1] Relation $\succ$ rational ist.
Dann erfüllt h die Bedingung
(α): $(\forall B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B})[B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset \Rightarrow h(B^1) = B^1 \cap h(B^2)]$.

Beweis

Sei $B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset$. Für ein beliebiges $x^o \varepsilon h(B^1)$ folgt nach Voraussetzung:

(1) $\quad (\forall y \varepsilon B^1)[\neg(y \succ x^o)]$.

Da $B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset$, gibt es ein $z^o \varepsilon B^1 \cap h(B^2)$, so daß

(2) $\quad (\forall z \varepsilon B^2)[\neg(z \succ z^o)]$

und mit (1) $\neg(z^o \succ x^o)$. Die negative Transitivität von $\succ$ führt dann mit (2) auf $(\forall z \varepsilon B^2)[\neg(z \succ x^o)]$, so daß also x^o zu $B^1 \cap h(B^2)$ gehört. Da die Umkehrung B^1 $h(B^2)$ (B^1) offensichtlich gilt, ist die Behauptung erfüllt. q.e.d.

Setzen wir zusätzlich voraus, daß alle Teilmengen von X der Mächtigkeit 2 in $\mathcal{B}$ enthalten sind, so können wir sofort mit den Theoremen 4.1 und 4.2 und Lemma 6.3 auf den folgenden Satz schließen:

---

[1] Eine Relation $P \subseteq \Omega \times \Omega$ heißt negativ transitiv $:\Leftrightarrow (\forall x, y, z \varepsilon \Omega)[\neg(xPy) \wedge \neg(yPz) \Rightarrow \neg(xPz)]$

Theorem 6.1

Sei $\succ$ eine negativ transitive und asymmetrische Relation auf einer nicht leeren Menge X und $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine bezüglich $\succ$ rationale AWK.

a) Sind alle zweielementigen Teilmengen von X in $\mathcal{B}$ enthalten, so erfüllt h das Schwache Axiom WA.

b) Sind alle zwei- und dreielementigen Teilmengen von X Elemente von $\mathcal{B}$, so erfüllt h auch das Starke Axiom (SA) und das Kongruenzaxiom (CA).

Aus Lemma 6.3 und Theorem 4.3 folgt ebenfalls unmittelbar:

Theorem 6.2

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK und $\mathcal{B}$ enthalte mit zwei Mengen B^1 und B^2 stets auch ihre Vereinigung. Ferner sei h bezüglich der negativ transitiven und asymmetrischen Relation $\succ$ rational. Dann erfüllt h auch das Starke Axiom und das Kongruenzaxiom.

Theorem 6.3

Erfüllt $h: \mathcal{B} \to 2^X$ das Schwache Axiom, so existiert eine reflexive und vollständige Relation, die h rationalisiert.

Beweis

Definieren wir die Relation V^o durch

$$xV^oy :\Leftrightarrow xVy \vee \neg(yVx), \quad \forall x,y \in X,$$

so ist klar, daß V^o reflexiv und vollständig ist. Unsere Aufgabe ist nun noch zu überprüfen, ob h rational bezüglich V^o ist. Sei deshalb $B^o \in \mathcal{B}$ vorgegeben. Es ist evident, daß

$$h(B^o) \subseteq \{z \mid z \in B^o \wedge (\forall y \in B^o)[zV^oy]\}.$$

Sei umgekehrt

(1) $\quad \bar{z} \in B^o \wedge (\forall y \in B^o)[\bar{z}V^oy]$

erfüllt. Nehmen wir an, $\bar{z} \notin h(B^o)$, so gibt es ein $z^o \in h(B^o)$ derart, daß $z^o \tilde{P} \bar{z}$ zutrifft. Mit dem Schwachen Axiom folgt hieraus $\neg(\bar{z}Vz^o)$, was einen Widerspruch zu (1) darstellt, womit der Satz bewiesen ist.

Wie M. Richter (1971, S.33) bereits herausgefunden hat, ist das Axiom (VA):

$$(\forall y \varepsilon X)(\forall B \varepsilon \mathcal{B})[(y \varepsilon B \wedge (\forall u \varepsilon B)[yVu]) \Rightarrow y \varepsilon h(B)]$$

notwendig und hinreichend für die Rationalität von $h: \mathcal{B} \rightarrow 2^X$.

Theorem 6.4

Eine AWK $h: \mathcal{B} \rightarrow 2^X$ ist genau dann b-rational, wenn sie das Axiom (VA) erfüllt.

Beweis

1. h sei b-rational.
   Dann gibt es eine Relation G mit der Eigenschaft, daß h b-rational bezüglich G ist, d.h.
   $$h(B) = \{x | x \varepsilon B \wedge (\forall y \varepsilon B)[xGy]\} \text{ für alle } B \varepsilon \mathcal{B}.$$
   Sei $y \varepsilon B$ mit $(\forall u \varepsilon B)[yVu]$ gegeben.
   Dann folgt hieraus für ein beliebiges $u \varepsilon B$:
   $$(\exists B^1 \varepsilon \mathcal{B})[y \varepsilon h(B^1) \wedge u \varepsilon B^1],$$
   und damit yGu. Infolgedessen gilt für alle $u \varepsilon B$ yGu, so daß also $y \varepsilon h(B)$.
2. Da sich das Axiom (VA) leicht in
   $$(\forall B \varepsilon \mathcal{B})[h(B) = \{x | x \varepsilon B \wedge (\forall y \varepsilon B)[xVy]\}]$$
   umformen läßt, sehen wir hieraus unmittelbar, daß unter Voraussetzung dieses Axioms h b-rational bezüglich V ist.

q.e.d.

In Anlehnung an M. Richter (1971) definieren wir für eine AWK h die Begriffe "reflexiv-rational", "total-rational" oder "transitiv-rational", wenn h bzgl. einer reflexiven, vollständigen oder transitiven Relation b-rational ist; h heißt regulär-rational, wenn h bezüglich einer vollständigen und transitiven Relation rational ist.

Aus Theorem 6.4 folgt durch einen kurzen Beweis (vgl. Richter (1971), S.34):

Theorem 6.5

Jede b-rationale AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist reflexiv-rational.

Beweis

Da eine b-rationale AWK h das (VA)-Axiom erfüllt, können wir eine reflexive Relation G dadurch definieren, daß wir für irgendzwei Elemente $x,y \varepsilon X$: $xGy :\Leftrightarrow [xVy \vee x=y]$ festsetzen. Für ein beliebiges $B \varepsilon \mathcal{B}$ und $z \varepsilon h(B)$ folgt für alle $y \varepsilon B$ zVy, so daß also auch zGy erfüllt ist. Gilt andererseits $x \varepsilon B \wedge (\forall y \varepsilon B)[xGy]$, so können wir hiervon auf

(1) $\quad xVy \vee x=y, \quad \forall y \varepsilon B,$

schließen. Da $h(B) \neq \emptyset$, gibt es ein $z^o \varepsilon h(B)$.
Angenommen $x \notin h(B)$, dann gilt $z^o \neq x$ und wegen (1) xVz^o.
Hieraus folgt

$$(\exists B^1 \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon h(B^1) \wedge z^o \varepsilon B^1].$$

Da $x \varepsilon B^1$, erhalten wir xVx. Für alle y aus B, die ungleich x sind, gilt nach (1) xVy.
Aus diesen beiden letzten Resultaten gewinnen wir aber:
$(\forall y \varepsilon B)[xVy]$, so daß schließlich mit Hilfe von (VA) $x \varepsilon h(B)$ folgt, was einen Widerspruch zu unserer Annahme bildet.

Theorem 6.6

Erfüllt $h: \mathcal{B} \to 2^X$ das Kongruenzaxiom (CA), so ist h transitiv-rational.

Beweis

Genügt die AWK h dem Kongruenzaxiom, so kann eine Relation G^* durch

$$xG^*y :\Leftrightarrow [xWy \vee x=y], \quad \forall x,y \varepsilon X$$

definiert werden.
Wie wir unmittelbar einsehen, ist G^* transitiv. Der Beweis von Theorem 6.5 kann dann direkt übernommen werden.

Theorem 6.7

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK, und $\mathcal{B}$ enthalte alle zweielementigen Teilmengen von X. Ist ferner (α)(vgl. Lemma 6.3) erfüllt, so ist h vollständig-rational.

Beweis

Wir definieren die Relation G^1 durch

$$xG^1y :\Leftrightarrow (x=y \vee (x \neq y \wedge x \varepsilon h(\{x,y\}))).$$

Es ist klar, daß diese Relation vollständig ist. Um nachzuweisen, daß h auch rational bezüglich G^1 ist, betrachten wir ein beliebiges $B\varepsilon\mathcal{B}$. Es seien ferner $\bar{x}\varepsilon h(B)$ und $\bar{y}\varepsilon B$ vorgegeben. Gilt $\bar{y}=\bar{x}$, so folgt per definitionem $\bar{x}G^1\bar{y}$. Betrachten wir nun den Fall, daß $\bar{x}\neq\bar{y}$. Da $\bar{x}\varepsilon h(B) \cap \{\bar{x},\bar{y}\}$ und $\{\bar{x},\bar{y}\} \subset B$, so folgt aus ($\alpha$): $h(\{\bar{x},\bar{y}\})=\{\bar{x},\bar{y}\} \cap h(B)$. Damit ist $\bar{x}\varepsilon h(\{\bar{x},\bar{y}\})$, und es gilt $\bar{x}G^1\bar{y}$. Es folgt daher $\bar{x} \varepsilon \{x|x\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[xG^1y]\}$.
Sei umgekehrt $\hat{x}\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[\hat{x}G^1y]$. Da $h(B)\neq\emptyset$, gibt es ein $z\varepsilon h(B)$. Gilt $\hat{x}=z$, so folgt $\hat{x}\varepsilon h(B)$ sofort. Im Falle jedoch, daß $\hat{x}\neq z$, impliziert die Definition von G^1, daß $\hat{x}\varepsilon h(\{\hat{x},y\})$ zutrifft. Da $z \varepsilon h(B) \cap \{\hat{x},z\}$, können wir mit ($\alpha$) auf $\hat{x}\varepsilon h(B)$ schließen.

Als nächstes wollen wir nachweisen, daß eine AWK h unter Voraussetzung des Starken Axioms (SA) bezüglich der Relation P^* rational ist.

Theorem 6.8

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$, die das Starke Axiom (SA) erfüllt, ist bezüglich einer azyklischen und transitiven Relation rational.

Beweis

Es soll gezeigt werden, daß die Relation P^*, die offensichtlich transitiv ist, die Behauptung des Satzes erfüllt. Sei deshalb $B^o\varepsilon\mathcal{B}$ vorgegeben. Es ist zu zeigen:

$$h(B^o) = \{x|x\varepsilon B^o \wedge (\neg\exists z\varepsilon B^o)[zP^*x]\}$$

bzw. $h(B^o) = \{x|x\varepsilon B^o \wedge (\forall z\varepsilon B^o)[\neg(zP^*x)]\}$.

1. Sei $x \varepsilon h(B^o)$ und $y \varepsilon B^o$, so folgt aufgrund des Starken Axioms $\neg(yP^*x)$.
2. Es werde umgekehrt nun vorausgesetzt, daß

   (1) $z \varepsilon B^o \wedge (\forall y \varepsilon B^o)[\neg(yP^*z)]$

   zutrifft. Aus der Annahme: $z \notin h(B^o)$, folgt
   $$(\exists x \varepsilon B^o)[x \varepsilon h(B^o) \wedge x\tilde{P}z].$$
   Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zu (1).
3. Wir zeigen nun, daß P^* azyklisch ist. Seien deshalb eine natürliche Zahl $k \geqq 2$ und $x^1,..,x^k \varepsilon X$ mit $x^1P^*x^2 \wedge .. \wedge x^{k-1}P^*x^k$ gegeben. Hieraus folgt $x^1P^*x^k$, so daß aufgrund des Starken Axioms $\neg(x^kVx^1)$ zutrifft. Die Annahme $x^kP^*x^1$ führt schließlich zusammen mit $x^1P^*x^k$ auf $x^1P^*x^1$ und damit zu $\neg(x^1Vx^1)$. Aufgrund der Definition von P^* wissen wir aber, daß infolge von $x^1P^*x^1$ ein $B^1 \varepsilon \mathcal{B}$ mit $x^1 \varepsilon h(B^1)$ existiert. Das ist aber ein Widerspruch zu $\neg(x^1Vx^1)$.

Anmerkung 6.1

Wird der Definitionsbereich $\mathcal{B}$ von h dadurch eingeschränkt, daß er mit zwei Mengen stets auch ihre Vereinigung enthalten soll, oder daß alle dreielementigen Teilmengen von X in $\mathcal{B}$ enthalten sein sollen, so kann in Theorem 6.8 anstelle des Starken Axioms das Schwache Axiom gesetzt werden. Die Behauptung des Satzes 6.8 unter diesen Voraussetzungen folgt dann mit Theorem 4.3 bzw. mit Theorem 4.1.

Theorem 6.9

Sei $h:\mathcal{B} \to 2^X$ eine AWK und $\mathcal{B}$ enthalte alle zwei- und dreielementigen Teilmengen von X ($|X| \geqq 3$). h erfüllt genau dann das Starke Axiom (SA), wenn h regulär-rational ist.

Beweis

Sei h regulär-rational. Aufgrund des Korollars 4.2 genügt es nachzuweisen, daß die Bedingung

(α): $B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap h(B^2) \neq \emptyset \Rightarrow h(B^1) = B^1 \cap h(B^2)$

erfüllt ist. Diese ergibt sich sofort mit Lemma 6.2 und

Korollar 4.2. Setzen wir umgekehrt das Starke Axiom voraus, so ist nachzuprüfen, ob h durch eine transitive und vollständige Relation rationalisiert wird. Wir werden zeigen, daß V eine solche Relation ist. Da aus der Definition von V unmittelbar $h(B) \subseteq \{x \mid x\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[xVy]\}$, $\forall B\varepsilon\mathcal{B}$, folgt, setzen wir nun voraus, daß $\bar{z}\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[\bar{z}Vy]$. Da $h(B) \neq \emptyset$, gibt es ein $\hat{y}\varepsilon h(B)$. Also gilt $\bar{z}V\hat{y}$. Wie im Korollar 4.2 nachgewiesen wurde, ist das Starke Axiom unter den Voraussetzungen dieses Theorems dem Kongruenzaxiom äquivalent. Deshalb können wir mit dessen Hilfe auf $\bar{z}\varepsilon h(B)$ schließen. Also ist h rational bezüglich V. V ist unter den Voraussetzungen dieses Satzes auch vollständig, denn für irgendzwei Elemente x und y ist $\{x,y\}\varepsilon\mathcal{B}$, und da $h(\{x,y\}) \neq \emptyset$, gilt stets $xVy \vee yVx$. Um die Transitivität zu überprüfen sei $xVy \wedge yVz$ gegeben. Da $\{x,y,z\}\varepsilon\mathcal{B}$, können wir wie im Beweis zu Theorem 4.1 (b) darauf schließen, daß $x\varepsilon h(\{x,y,z\})$, womit der Satz bewiesen ist.

Im Theorem 6.10 soll nachgewiesen werden, daß das Kongruenzaxiom (CA) notwendig und hinreichend für die Existenz einer regulär-rationalen AWK ist, wenn keine weiteren Voraussetzungen über den Definitionsbereich der AWK gemacht werden (vgl. Richter (1966, S.639-40)). Zum Beweis dieses Satzes werden die folgenden beiden Lemmata herangezogen. Zu ihrer Formulierung ist jedoch zunächst die Einführung einiger weiterer Definitionen sinnvoll.

Definition 6.1

Eine Relation G auf einer Menge X heißt "Äquivalenzrelation", wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition 6.2

Eine Relation G auf einer Menge X heißt "Kongruenzrelation" bezüglich einer Relation Q auf X, wenn G Äquivalenzrelation ist und:

$$(\forall u,v,x,y\varepsilon X)[uGx \wedge xQy \wedge yGv \Rightarrow uQv].$$

Bezeichnungen

Ist G eine Äquivalenzrelation über X, so soll für jedes $x \varepsilon X$ mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich G in X bezeichnet werden, d.h. also

$$[x] := \{y \mid y\varepsilon X \wedge yGx\}.$$

Ist $z\varepsilon[x]$, so heißt z ein "Repräsentant" von $[x]$.
Ferner heiße $X|G$ die "Quotientenmenge" von X nach G, wobei

$$X|G = \{\alpha \mid (\exists x\varepsilon X)[\alpha = [x]]\}.$$

Definition 6.3

Ist G eine Relation auf X und ist L Äquivalenzrelation auf X, so werde die Relation $G|L$ auf $X|L$ erklärt durch

$$(\forall x,y\varepsilon X)[[x]G|L[y] :\Leftrightarrow (\exists u,v\varepsilon X)[uLx \wedge vLy \wedge uGv]].$$

Definition 6.4

Sei G eine Relation auf X. Die Relation Q auf X heißt eine Erweiterung von G genau dann, wenn

$$(\forall x,y\varepsilon X)[xGy \Rightarrow xQy].$$

Der Beweis des folgenden Lemmas ergibt sich leicht durch Zurückführung der darin auftretenden Begriffe auf ihre Definitionen.

Lemma 6.4

Sei Q eine irreflexive und transitive Relation auf X, und es sei ferner L eine Kongruenzrelation bezüglich Q. Dann ist $Q|L$ eine irreflexive und transitive Relation auf $X|L$.

Den Beweis zu dem nächsten Lemma finden wir bei Szpilrajn (1930).

Lemma 6.5

Jede irreflexive und transitive Relation auf einer Menge X besitzt eine transitive und vollständige Erweiterung auf X.

Theorem 6.10

$h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist genau dann regulär-rational, wenn h das Kongruenzaxiom (CA) erfüllt.

Beweis

1. Teil: Sei h eine beliebige regulär-rationale AWK. Dann gibt es eine Relation G^o derart, daß

(1) $(\forall B \varepsilon \mathcal{B})[h(B)=\{x \mid x \varepsilon B \wedge (\forall y \varepsilon B)[x G^o y]\}]$.

Sei $B^o \varepsilon \mathcal{B} \wedge \bar{x} \varepsilon h(B^o)$. Dann gilt

(2) $(\forall y \varepsilon B^o)[\bar{x} G^o y]$.

Sei nun $u \varepsilon B^o$ mit $u W \bar{x}$ vorgegeben. Dann gilt definitionsgemäß

$u V \bar{x} \vee (\exists x^1 \ldots . x^m)[u V x^1 \wedge .. \wedge x^m V \bar{x}]$.

1. Fall: $u V \bar{x}$. Hieraus folgt

$(\exists \hat{B} \varepsilon \mathcal{B})[u \varepsilon h(\hat{B}) \wedge \bar{x} \varepsilon \hat{B}]$

und mit (1)

$u \varepsilon \hat{B} \wedge (\forall z \varepsilon \hat{B})[u G^o z]$, so daß $u G^o \bar{x}$ erfüllt ist. Die Transitivität von G^o führt schließlich von $u G^o \bar{x}$ und $(\forall y \varepsilon B^o)[\bar{x} G^o y]$ auf $(\forall y \varepsilon B^o)[u G^o y]$, so daß hieraus mit Hilfe von (1) $u \varepsilon h(B^o)$ folgt.

2. Fall: $(\exists x^1 \ldots . x^m)[u V x^1 \wedge .. \wedge x^m V \bar{x}]$. Hieraus folgt gemäß dem ersten Fall:

$u G^o x^1 \wedge .. \wedge x^m G^o \bar{x}$,

wodurch wir $u G^o \bar{x}$ erhalten. Dieses Ergebnis führt mit (2) und (1) wieder auf $u \varepsilon h(B^o)$. Also erfüllt h in beiden Fällen das Kongruenzaxiom.

2. Teil:

1. Wir setzen nun (CA) voraus und definieren die Relation $P \subseteq X \times X$ durch

$x P y :\Leftrightarrow [x W y \wedge \neg(y W x)]$.

Offensichtlich ist P irreflexiv und transitiv. Wir definieren ferner die Relation $J \subseteq X \times X$ durch

$x J y :\Leftrightarrow [x=y \vee (x W y \wedge y W x)]$.

Wir sehen aus dieser Definition sofort, daß J eine Äquivalenzrelation ist. Unser nächstes Ziel ist nachzuweisen, daß

J eine Kongruenzrelation bezüglich P ist. Aus diesem Grunde betrachten wir die Elemente u,v,x,y aus X mit den Eigenschaften, daß $(uJx \wedge xPy \wedge yJv)$ gilt. Durch Umformungen unter Anwendung der Definitionen dieser Relationen gelangen wir schließlich zu uPv.

2. Da P irreflexiv und transitiv ist und ferner J eine Äquivalenzrelation ist, können wir Lemma 6.4 anwenden und erhalten, daß $P|J$ eine irreflexive und transitive Relation auf $X|J$ ist. Demnach besitzt $P|J$ eine transitive und vollständige Erweiterung auf $X|J$ (vgl. Lemma 6.5), die wir mit P^1 bezeichnen. Erklären wir eine Relation $\bar{G}$ auf X durch
$$x\bar{G}y :\Leftrightarrow xJy \vee [x]P^1[y],$$
so ist diese vollständig und transitiv.

3. Es soll nun noch nachgewiesen werden, daß h rational bezüglich $\bar{G}$ ist, d.h. es ist für alle $B\varepsilon\mathcal{B}$ zu zeigen, daß
$$h(B) = \{x|x\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[x\bar{G}y]\}.$$
Sei deshalb $B^0\varepsilon\mathcal{B}$ und $\bar{x}\varepsilon h(B^0)$ vorgegeben.
Hiervon können wir unmittelbar auf
$$\bar{x}\varepsilon B^0 \wedge (\forall y\varepsilon B^0)[\bar{x}Wy]$$
schließen, so daß also auch
$$(\forall y\varepsilon B^0)[[\bar{x}]P^1[y] \vee \bar{x}Jy]$$
gilt und damit auch
$$(\forall y\varepsilon B^0)[\bar{x}\bar{G}y].$$
Sei umgekehrt $\bar{x} \varepsilon \{x|x\varepsilon B^0 \wedge (\forall y\varepsilon B^0)[x\bar{G}y]\}$.
Da nach Voraussetzung $h(B^0)\neq\emptyset$, gibt es ein $\bar{y}\varepsilon h(B^0)$, so daß wegen $\bar{y}V\bar{x}$
$$\bar{y}J\bar{x} \vee [\bar{y}]P^1[\bar{x}]$$
folgt. Andererseits gilt aber auch $\bar{x}\bar{G}\bar{y}$ und damit
$$\bar{x}J\bar{y} \vee [\bar{x}]P^1[\bar{y}],$$
woraus wegen der Asymmetrie von P^1 nur $\bar{x}J\bar{y}$ folgen kann. Die Definition von J führt dann auf $\bar{x}=\bar{y} \vee \bar{x}W\bar{y}$. Gilt $\bar{x}=\bar{y}$, so folgt hiermit $\bar{x}\varepsilon h(B^0)$. Trifft $\bar{x}W\bar{y}$ zu, so können wir von $[\bar{x}W\bar{y} \wedge \bar{y}\varepsilon h(B^0) \wedge \bar{x}\varepsilon B^0]$ mit dem Kongruenzaxiom auf $\bar{x}\varepsilon h(B^0)$ schließen.

q.e.d.

Anmerkung 6.2

Wie im Anschluß an das Theorem 6.7 soll auch hier darauf hingewiesen werden, daß an die Stelle des Kongruenzaxiomes das Schwache Axiom (WA) gesetzt werden kann, wenn $\mathscr{B}$ mit irgendzwei Mengen stets auch deren Vereinigung enthält oder wenn alle dreielementigen Teilmengen von X Elemente von $\mathscr{B}$ sind.
Unter der erstgenannten Bedingung stellt auch der nachfolgende Satz einen Zusammenhang zwischen der Rationalität von h bezüglich V und dem Kongruenzaxiom her:

Theorem 6.11

Unter der Voraussetzung

$$(\forall A,B \subseteq X)[A,B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B}]$$

besteht folgende Äquivalenz:
V ist transitiv und h ist b-rational bezüglich V genau dann, wenn h das Kongruenzaxiom erfüllt.

Beweis

1. Sei h b-rational bezüglich V. Ferner gelte für beliebiges $B^0 \in \mathscr{B}$ und für $x,y \in B^0$

   $$x \in h(B^0) \wedge yWx.$$

   Hieraus folgt sofort mit der Transitivität von V yVx. Da wegen der Rationalität von h bezüglich V für $u \in B^0$ xVu gilt, gewinnen wir mit der Transitivität von V auch das Resultat, daß für alle $u \in B^0$ yVu zutrifft. Infolgedessen gilt auch $y \in h(B^0)$.
2. (CA) werde vorausgesetzt. Aus der Definition von V ergibt sich sofort:

   $$(\forall B \in \mathscr{B})[h(B) \subseteq \{x \mid x \in B \wedge (\forall y \in B)[xVy]\}]$$

   Sei nun umgekehrt für eine beliebige Budgetmenge B^1 ein $x^1 \in \{x \mid x \in B^1 \wedge (\forall y \in B^1)[xVy]\}$ gegeben.
   Angenommen $x^1 \notin h(B^1)$, dann existiert ein $x^2 \neq x^1$ mit $x^2 \in h(B^1)$. Das Axiom (CA) führt jedoch von $x^1 V x^2$ und $x^2 \in h(B^1)$ auf $x^1 \in h(B^1)$, im Widerspruch zur Annahme.
   Die Transitivität von V ergibt sich unmittelbar unter den Voraussetzungen dieses Satzes wie im Beweis zu Theorem 4.3 .

Der folgende Satz stellt eine Folgerung aus den Theoremen 6.8 und 6.10 dar

Theorem 6.12

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist genau dann bezüglich einer asymmetrischen und negativ transitiven Relation P rational, wenn h das Kongruenzaxiom erfüllt.

Beweis

Setzen wir zunächst voraus, daß h bezüglich der asymmetrischen und negativ transitiven Relation P rational ist, und definieren wir die Relation $\bar{P}$ durch

(1) $x\bar{P}y :\Leftrightarrow \neg(yPx), \forall x,y \varepsilon X,$

so folgt in wenigen Schritten, daß $\bar{P}$ vollständig und transitiv ist. Denn betrachten wir beliebige Elemente $x,y \varepsilon X$, so impliziert die Asymmetrie von P: $\neg(xPy \wedge yPx)$, bzw. $(\neg(xPy) \vee \neg(yPx))$ und damit $(y\bar{P}x \vee x\bar{P}y)$. Nehmen wir ferner an, daß für beliebige Elemente $u,v,w \varepsilon X$: $u\bar{P}v \wedge v\bar{P}w$ gilt, so führt die Definition von $\bar{P}$ zusammen mit der negativen Transitivität von P unmittelbar auf $u\bar{P}w$.

Ebenso leicht sehen wir, daß h bezüglich $\bar{P}$ b-rational ist. Theorem 6.10 läßt dann sofort den Schluß auf die Gültigkeit des Kongruenzaxioms zu.

Setzen wir umgekehrt das Kongruenzaxiom voraus, so ist h nach Theorem 6.10 regulär-rational, d.h. per definitionem, h ist rational bezüglich einer vollständigen und rationalen Relation Q. Setzen wir wieder wie in (1)

$$x\bar{Q}y :\Leftrightarrow \neg(yQx), \forall x,y \varepsilon X,$$

so folgt die Asymmetrie von $\bar{Q}$ aus der Äquivalenz:

$$(\forall x,y \varepsilon X)[(xQy \vee yQx) \Leftrightarrow (\neg(xQy) \Rightarrow yQx) \Leftrightarrow (\neg(yQx) \Rightarrow \neg\neg(xQy)) \Leftrightarrow (x\bar{Q}y \Rightarrow \neg(y\bar{Q}x))] \ .$$

Auf die negative Transitivität von $\bar{Q}$ können wir sofort von der Definition von $\bar{Q}$ und der Transitivität von Q schließen.

Da ferner für alle $B\varepsilon\mathcal{B}$: $h(B)=\{x|x\varepsilon X \wedge (\forall y\varepsilon B)[xQy]\}$, führt die Definition von $\bar{Q}$ sofort auf

$$(\forall B\varepsilon\mathcal{B})[h(B)=\{x|x\varepsilon X \wedge (\forall y\varepsilon B)[\neg(y\bar{Q}x)]\}\ .$$

Anmerkung 6.3

Wie der vorausgehende Beweis gezeigt hat, ist die Aussage "h ist regulär-rational" äquivalent der Aussage "h ist bezüglich einer asymmetrischen und negativ transitiven Relation rational".

Für das folgende Theorem, einer Folgerung aus der obigen Anmerkung, dem Korollar 4.2 und einem Satz von Hansson (1968) (vgl. dazu auch Fishburn (1973, S.200-201)), benötigen wir den Begriff der "Erweiterung" einer AWK.

Definition 6.5

Sei $h:\mathcal{B}\to 2^X$ eine AWK. Dann heißt $g:\mathcal{B}'\to 2^X$ eine Erweiterung von h genau dann, wenn:

$$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}' \ \wedge\ (\forall B\varepsilon\mathcal{B})[g(B)=h(B)].$$

Theorem 6.13

Sei $h:\mathcal{B}\to 2^X$ eine AWK. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) h ist regulär-rational.

(b) Es gibt eine Erweiterung $g:\mathcal{B}'\to 2^X$ von h derart, daß g das Starke Axiom, (CA) und die Bedingung $B^1,B^2\varepsilon\mathcal{B}' \Rightarrow B^1\cup B^2\varepsilon\mathcal{B}'$ erfüllt.

(c) Es gibt eine Erweiterung $f:\mathcal{B}''\to 2^X$ von h, derart daß f das Starke Axiom und das Kongruenzaxiom erfüllt und $\mathcal{B}''$ alle zwei- und dreielementigen Teilmengen von X enthält.

Beweis

1. (a) $\Rightarrow$ (b)

Sei h regulär-rational. Dann führt die Anmerkung 6.3 auf das Ergebnis, daß h bezüglich einer asymmetrischen und negativ transitiven Relation rational ist. Mit Theorem 15.4 in Fishburn (1973, S.201) können wir dann darauf schließen, daß es eine Erweiterung $g: \mathcal{B}' \to 2^X$ von h gibt derart, daß diese die Bedingung

(α): $B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap g(B^2) \neq \emptyset \Rightarrow g(B^1) = B^1 \cap g(B^2)$

erfüllt und ferner

$$(\forall B, B')[B, B' \in \mathcal{B}' \Rightarrow B \cup B' \in \mathcal{B}']$$

gilt. Mit Hilfe von Theorem 4.3 erhalten wir dann, daß $g: \mathcal{B}' \to 2^X$ das Starke Axiom und das Kongruenzaxiom erfüllt.

2. (b) $\Rightarrow$ (c):

Analog dem Beweis von Theorem 15.4 (c) in Fishburn (1973, S.200 -201) läßt sich zeigen, daß es eine Erweiterung $f: \mathcal{B}'' \to 2^X$ von $g: \mathcal{B}' \to 2^X$ gibt, die (α) erfüllt und in deren Definitionsbereich alle zwei- und dreielementigen Teilmengen von X enthalten sind. Wenden wir dann das Korollar 4.2 an, so haben wir (b)$\Rightarrow$(c) bewiesen.

3. (c) $\Rightarrow$ (a):

Auf die Implikation "(c)$\Rightarrow$(a)" kann unmittelbar mit Theorem 6.10 und der Definition 6.5 geschlossen werden.

6.2 Das Axiom (PCA) und die schwache Rationalisierbarkeit

Wie im Theorem 6.10 nachgewiesen werden konnte, ist eine Korrespondenz h regulär-rational, wenn sie das Kongruenzaxiom erfüllt. Setzt man jedoch anstelle dieser Prämisse das auf Fishburn (1976) zurückzuführende "Partielle Kongruenzaxiom" (PCA) voraus, so gewinnt man ein Ergebnis über "schwach rationale" Auswahlkorrespondenzen, worunter folgendes zu verstehen ist:

Definition 6.6

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt "schwach rational" genau dann, wenn eine Relation $\succ$ auf X existiert derart, daß für alle $B \in \mathcal{B}$

$$\{x \mid x \in B \wedge (\neg \exists y \in B)[y \succ x]\} \subseteq h(B) .$$

Bei der Formulierung des partiellen Kongruenzaxioms wird die Bezeichnung $h(\mathfrak{A})$ für $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}$ im folgenden Sinne gebraucht:

$$x \varepsilon h(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow x \varepsilon \bigcup_{B \varepsilon \mathfrak{A}} B \wedge (\forall B \varepsilon \mathfrak{A})[x \varepsilon B \Rightarrow x \varepsilon h(B)].$$

$x \varepsilon h(\mathfrak{A})$ bedeutet daher, daß x aus jeder Budgetmenge von $\mathfrak{A}$, in der es auftritt, auch gewählt wird.

Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht den Sinn von $h(\mathfrak{A})$: Es gilt

$h(\{\{x,y,z\},\{x,z,w\},\{x,y,w\}\}) = \{y\}$, falls

$h(\{x,y,z\}) = \{y\}$, $h(\{x,z,w\}) = \{z,w\}$

$h(\{x,y,w\}) = \{y\}$.

Fishburns "partielles Kongruenzaxiom" sagt folgendes aus:

Axiom (PCA)

Für jedes endliche nicht leere Teilmengensystem $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ gilt $h(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$.

Definition 6.7

Eine AWK $h: \mathfrak{B} \to 2^X$ heißt "schwach rational" bezüglich einer auf X gegebenen Relation $\succ$ genau dann, wenn für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}$ die Bedingung

$$C_{\succ}(B) := \{x | x \varepsilon B \wedge (\neg \exists y \varepsilon B)[y \succ x]\} \subseteq h(B) \quad \wedge \quad C_{\succ}(B) \neq \emptyset$$

erfüllt ist.

Für die Beweise der beiden nächsten Behauptungen ist das Auswahlaxiom von großer Bedeutung. Bei dem Auswahlaxiom handelt es sich um die Annahme:

Zu jedem Mengensystem $\mathfrak{A}$ von nichtleeren Mengen gibt es eine Abbildung f, deren Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ ist und deren Wert f(A) für jedes $A \varepsilon \mathfrak{A}$ jeweils ein Element von A ist.

Die Gültigkeit dieser Aussage ist leicht zu beweisen, falls es sich bei $\mathfrak{A}$ um ein endliches Mengensystem handelt. Schwerwiegende Bedenken ergeben sich jedoch für unendliche Mengensysteme, da das Auswahlaxiom die Existenz von Funktionen postuliert, ohne eine Angabe über deren effektive Konstruktion zu machen. Aus diesem Grund wird es auch von den Intuitionisten und Konstruktivisten abgelehnt.

In den meisten Teilgebieten der Mathematik wird jedoch von dem

Auswahlaxiom Gebrauch gemacht. In vielen Fällen ist es jedoch von Vorteil, nicht dieses Axiom direkt, sondern an dessen Stelle zwei hierzu äquivalente Aussagen, den Wohlordnungssatz und das Zornsche Lemma, zu verwenden.
Der Wohlordnungssatz besagt, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Um den Sinn dieser Aussage verstehen zu können, benötigen wir noch die Begriffe des "minimalen Elementes" und der "Wohlordnung".

Definition 6.8

Sei $\succ$ eine Relation auf X. $a \varepsilon X$ heißt ein "minimales Element" von X (bezüglich $\succ$) $:\Leftrightarrow (\neg \exists z \varepsilon X)[a \succ z]$.

Definition 6.9

Eine Menge X heißt genau dann "wohlgeordnet", wenn X linear [1] geordnet ist und wenn jede nicht leere Teilmenge X' von X ein minimales Element besitzt.

Der Inhalt des Wohlordnungssatzes ist also der, daß auf jeder nicht leeren Menge X eine Ordnung, die eine Wohlordnung ist, erklärt werden kann.
An die Stelle des Wohlordnungssatzes tritt in Beweisen häufiger das Zornsche Lemma, durch das gewisse unnatürliche Schlüsse, die früher auf dem Wohlordnungsaxiom beruhten, vermieden werden. Unter dem Zornschen Lemma verstehen wir folgende Aussage:
Eine geordnete Menge, in der es zu jeder linear geordneten Teilmenge eine obere Schranke gibt, besitzt wenigstens ein maximales Element.

Wir beweisen nun mit Hilfe des Wohlordnungssatzes ein ähnliches Lemma wie Fishburn (1976, Lemma 2, S.1037).

---

[1] X heißt "linear geordnet" genau dann, wenn auf X eine antisymmetrische, transitive und vollständige Relation erklärt ist. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt "Ordnung".

Lemma 6.6

Ist eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ bezüglich einer vollständigen und transitiven Relation $\succsim$ schwach rational, so erfüllt sie das Axiom (PCA).

Beweis

Nach Voraussetzung trifft für alle $B \varepsilon \mathcal{B}$

$$C_{\succsim}(B) = \{z \mid z \varepsilon B \wedge (\forall x \varepsilon B)[z \succsim x]\} \subseteq h(B)$$

zu. Unter Verwendung des Wohlordnungsaxioms läßt sich X durch die lineare Ordnung $\prec_0$ wohlordnen. Erinnern wir uns, daß eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x \succsim y \wedge y \succsim x \quad \text{für alle } x,y \varepsilon X$$

definiert werden kann, so ist es möglich, eine lineare Ordnung auf X durch

(1) $\quad x \dot{\succ} y \;:\Leftrightarrow\; x \succ y \vee (x \sim y \wedge x \prec_0 y)$

zu erklären.

Für jedes $B \varepsilon \mathcal{B}$ ist die Menge $C_{\succsim}(B)$ eine nicht leere Teilmenge von X, die in einer Äquivalenzklasse von X bezüglich $\sim$ enthalten ist. Eine solche Äquivalenzklasse wird durch die Relation $\prec_0$ wohlgeordnet, so daß infolgedessen genau ein Element $\hat{z}$ in $C_{\succsim}(B)$ existiert, welches bezüglich $\prec_0$ minimales Element ist. Da dann für alle $x \varepsilon C_{\succsim}(B)$ $\hat{z} \dot{\succ} x$ gilt, ist $\hat{z}$ bezüglich der Relation $\dot{\succ}$ als einziges Element maximal in der Menge $C_{\succsim}(B)$. Aufgrund der Definition von $\dot{\succ}$ in (1) gilt für alle $x \varepsilon B$ $\hat{z} \dot{\succ} x$. Hieraus folgt dann, daß

$$C_{\dot{\succ}}(B) = \{\hat{z}\} \subseteq h(B).$$

Wird nun irgendein endliches, nicht leeres Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{B}$ betrachtet, so gibt es in jeder Budgetmenge $B \varepsilon \mathfrak{A}$, wie oben ausgeführt, genau ein bezüglich der Relation $\dot{\succ}$ maximales Element. Da $\mathfrak{A}$ endlich ist, bilden diese Elemente eine endliche Menge A', die ebenfalls durch die Relation $\dot{\succ}$ linear geordnet wird. Infolgedessen gibt es in A' genau ein bezüglich $\dot{\succ}$ maximales Element $\tilde{y}$. Dieses ist außerdem maximal bezüglich $\dot{\succ}$ in der Menge $\bigcup_{B \varepsilon \mathfrak{A}} B$ und ist Element von h(B) für jedes B, welches $\tilde{y}$ enthält, so daß also $C(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$ erfüllt ist.

q.e.d.

Der Wohlordnungssatz und das Zornsche Lemma kommen im Beweis des folgenden Satzes zur Anwendung.

Theorem 6.14

Sei $h: \mathfrak{B} \to 2^X$ gegeben. Ist h(B) für alle $B \varepsilon \mathfrak{B}$ eine endliche Menge, so ist h genau dann bezüglich einer transitiven und vollständigen Relation G schwach rational, wenn h das partielle Kongruenzaxiom erfüllt.

Den Beweis dieses Satzes finden wir bei Fishburn (1976, S.1037 -1039). Hierzu soll nur noch vermerkt werden, daß Fishburn eine asymmetrische und negativ transitive Relation G voraussetzt. Wie wir aber dem Korollar 6.2 unmittelbar entnehmen können, sind die beiden Sätze äquivalent.

In diesem Abschnitt konnten wir erkennen, daß die verschiedenen Verhaltensregeln von wesentlichem Einfluß darauf sind, welchen Gesetzmäßigkeiten eine Relation, die eine gegebene Auswahlkorrespondenz h rationalisiert, genügt. In umgekehrter Richtung kann von den Eigenschaften einer, die Auswahlkorrespondenz h rationalisierenden Relation, auf die Verhaltensregeln, die h erfüllt, geschlossen werden.
Ferner zeigen auch einige Sätze dieses Paragraphen, daß sowohl die Verhaltensregeln als auch die Eigenschaften einer Relation, durch die h rationalisiert wird, von der Struktur von $\mathfrak{B}$ bestimmt werden.

§7 Repräsentierbarkeit von Auswahlkorrespondenzen durch reelwertige Funktionen

7.1 Repräsentierbarkeit auf beliebigen Budgeträumen

In diesem Paragraphen werden wir die Frage untersuchen, ob sich die Wertschätzung, die ein Handlungsträger den Alternativmengen einer Budgetmenge gegenüber besitzt, so in Zahlen ausdrücken läßt, daß denjenigen Alternativen, die er wählt, eine größere Zahl zugeordnet wird als denen, die er zurückweist.
Besitzt ein Handlungsträger eine Präferenzvorstellung von allen Alternativen einer Menge X und existiert eine reelwertige Funktion, die einer Alternative, die er höher einschätzt eine größere Zahl zuordnet als einer anderen, die ihm weniger wert ist, so heißt eine solche Funktion "Nutzenfunktion". Wir befassen uns hier nur mit ordinalen Nutzenfunktionen. Das bedeutet, daß uns die Nutzenwerte nur insoweit interessieren, als von zwei Zahlen, die zwei Alternativen zugeordnet werden, die eine größer als die andere ist oder beide gleich sind.

Diese Überlegungen lassen sich auch unter Verwendung der Begriffe "Homomorphismus" und "Isomorphismus" formalisieren:

Die Funktion f, die die Trägermenge X^1 des Relationsgebildes $\mathfrak{O} \equiv \langle X^1, R_1^{(i_1)}, \ldots, R_k^{(i_k)} \rangle$ in (auf) die Trägermenge des Relationsgebildes $\tilde{\mathfrak{O}} \equiv \langle X^2, \tilde{R}_1^{(i_1)}, \ldots, \tilde{R}_k^{(i_k)} \rangle$ abbildet, heißt ein Homomorphismus von $\mathfrak{O}$ in (auf) $\tilde{\mathfrak{O}}$ genau dann, wenn für alle $R_j^{(i_j)}$, $j \leq k$, und für alle $x_1, \ldots, x_{i_j}$ aus X gilt:

$$(x_1, \ldots, x_{i_j}) \in R_j^{(i_j)} \Longrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_{i_j})) \in \tilde{R}_j^{(i_j)} \quad .$$

Dabei bezeichnen die $R_j^{(i_j)}$ i_j-stellige Relationen.
Ist ein Homomorphismus eineindeutig, d.h. gilt

$$(x_1, \ldots, x_{i_j}) \in R_j^{(i_j)} \Longleftrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_{i_j})) \in \tilde{R}_j^{(i_j)} \quad ,$$

so wollen wir von einem "Isomorphismus" sprechen.

Eine Funktion u, die die Menge X des Paares $\langle X, \succsim \rangle$ in die Menge IR des Paares $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ isomorph abbildet, wollen wir "Nutzenfunktion" nennen.
Eine solche Funktion ist also nichts anderes als eine ordnungsübertragende Abbildung der Alternativmenge X in IR. Es gilt daher:

$$(\forall x^1, x^2 \varepsilon X)[x^1 \succsim x^2 \Leftrightarrow u(x^1) \geq u(x^2)].$$

Trifft diese Äquivalenz zu, so können wir auch sagen, daß u die Relation $\succsim$ "repräsentiert".
Da jede aus u durch eine positiv-monotone Transformation hervorgehende Funktion u' ebenfalls ordnungsübertragend ist, ist auch u' eine Nutzenfunktion, die $\succsim$ repräsentiert. Die Funktion u ist daher eine ordinale Nutzenfunktion, d.h.:
Repräsentiert $u: X' \to \mathbb{R}$ eine Relation $\succsim$, so repräsentiert eine andere Funktion $u': X' \to \mathbb{R}$ die Relation $\succsim$ ebenfalls, wenn eine streng monoton wachsende Funktion f, die IR auf IR abbildet, existiert, so daß für alle $x \varepsilon X'$

$$u'(x) = f(u(x))$$

gilt.
Offensichtlich läßt sich zu jeder Nutzenfunktion, die auf X' erklärt ist, stets auch eine vollständige und transitive Relation $\succsim$, für die $x^1 \succsim x^2$ gilt, wenn $u(x^1) \geq u(x^2)$ zutrifft, finden.
Das Umgekehrte braucht jedoch nicht der Fall zu sein. Denn betrachten wir als Beispiel auf $\mathbb{R}^2$ die lexikographische Ordnung L (vgl. De Finetti (1937)), die definiert wird durch

$$(x_1, x_2)\ L\ (y_1, y_2) :\Leftrightarrow [(x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \geq y_2)],$$

so ist diese durch keine reelwertige Funktion repräsentierbar.
Unter der Annahme, L wäre repräsentierbar, gäbe es eine reelwertige Funktion u^1 derart, daß

$$(x_1, x_2)\ L\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow u^1(x_1, x_2) \geq u^1(y_1, y_2).$$

Wird mit I_a das Intervall $[\inf u^1(a, \mathbb{R}), \sup u^1(a, \mathbb{R})]$ für jedes $a \varepsilon \mathbb{R}$ bezeichnet, so ist dieses nicht degeneriert, und für $a' \neq a$ folgt stets $I_a \cap I_{a'} = \emptyset$. Auf diese Weise erhalten wir eine eineindeutige Abbildung der reellen Zahlen auf eine Menge von paarweise disjunkten Intervallen auf der Zahlengeraden. Dadurch entsteht aber ein Widerspruch, da die reellen Zahlen überabzählbar, die Menge der nichtdegenerierten Intervalle auf der reellen Zahlengeraden aber abzählbar ist. disjunkten

In den nachfolgenden Theoremen werden Bedingungen angegeben, unter denen eine Relation durch eine Nutzenfunktion repräsentierbar ist. Die Beweise dieser Sätze werden hier nicht geführt, sondern sie können alle in dem von den Autoren D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes und A. Tversky verfaßten Buch "Foundations of Measurement" (1971) nachgelesen werden.

Theorem 7.1

Sei X eine endliche, nicht leere Menge. Ist ferner $\succsim$ eine vollständige und transitive Relation auf X, so ist $\succsim$ repräsentierbar, d.h. es gibt eine Funktion $u\colon X \to \mathbb{R}$, so daß

$$(\forall x,y \in X)[x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geqq u(y)].$$

Der folgende Satz wurde bereits von Cantor (1895) gefunden.

Theorem 7.2

Sei X eine abzählbare Menge und $\succsim$ eine vollständige, transitive und antisymmetrische Relation auf X. Dann gibt es eine Funktion $u\colon X \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$(\forall x,y \in X)[x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geqq u(y)].$$

Zur Formulierung des nächsten Satzes (vgl. Birkhoff (1948, pp. 31-32)) benötigen wir den Begriff "ordnungsdicht" [1].

Definition 7.1

Sei $\succsim$ eine vollständige und transitive Relation auf einer Menge X und A sei eine Teilmenge von X. A heißt "ordnungsdicht"

---

[1] Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt "Ordnung". Eine vollständige und transitive Relation heißt "schwache Ordnung" und eine vollständige, transitive und antisymmetrische Relation wird "vollständige Ordnung" genannt.

in X bezüglich $\succsim$ genau dann, wenn für alle $x,y \in X$ mit $x \succ y$ ein $z \in A$ existiert derart, daß $x \succsim z \succsim y$.

Theorem 7.3

Ist $\succsim$ eine vollständige Ordnung auf X. Dann sind die nächsten beiden Bedingungen äquivalent:

(i) Es gibt eine endliche oder abzählbare und bezüglich $\succsim$ ordnungsdichte Teilmenge von X.

(ii) Es gibt einen Isomorphismus von $\langle X, \succsim \rangle$ in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$.

Ein zentraler Satz der Nutzentheorie, der von Debreu (1954) gefunden wurde, ist der folgende:

Theorem 7.4

Ist X eine zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so ist die Relation $\succsim$ genau dann eine stetige [1] und schwache Ordnung auf X, wenn eine stetige Nutzenfunktion, die $\succsim$ repräsentiert, existiert.

Dieser Satz von Debreu wurde von Rader (1963) auf von oben (von unten) halbstetige Relationen übertragen.

Theorem 7.5

Sei X eine zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.
Die Relation $\succsim$ ist genau dann eine von oben (unten) halbstetige schwache Ordnung auf X, wenn sie durch eine von oben [2] (unten) halbstetige Nutzenfunktion repräsentiert werden kann.

Die vorangehenden Theoreme dieses Paragraphen behandelten stets die Repräsentation von Relationen durch numerische Funktionen. Wir wollen uns anschließend ausführlich der Frage zuwenden, ob das Auswahlverhalten ebenfalls durch eine numerische Funktion repräsentierbar

---

1) $\succsim$ ist stetig auf T, wenn $\succsim$ von oben und von unten halbstetig ist, wenn für jedes $x^0 \in T$ die Mengen $\{x \mid x \succsim x^0\}$ und $\{x \mid x^0 \succsim x\}$ abgeschlossen in T sind.

2) Eine Funktion $u: X \to \mathbb{R}$ heißt von oben (unten) halbstetig wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \mid u(x) \geq \alpha\}$ abgeschlossen ist.

und damit meßbar ist. Wir suchen also eine Funktion, die denjenigen Alternativen, die aus einer Budgetmenge gewählt werden, den höchsten Wert zuordnet. Diese Überlegungen führen zu folgender Definition:

Definition 7.2

Eine AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$ heißt "repräsentierbar" genau dann, wenn es eine Funktion $g: X\to \mathbb{R}$ gibt derart, daß

$$(\forall B\in\mathcal{B})[h(B)=\{x\,|\,x\in B \wedge (\forall y\in B)[g(x)\geq g(y)]\}].$$

Anmerkung 7.1

Um zu unterscheiden, ob eine numerische Funktion eine AWK h oder eine Präferenzvorstellung repräsentiert, soll diese Funktion im ersten Fall "Repräsentation" und im zweiten Fall "Nutzenfunktion" genannt werden.
Ist h bezüglich einer Relation rational und kann diese durch eine Nutzenfunktion u repräsentiert werden, so ist diese Nutzenfunktion auch eine Repräsentation von h. Ist umgekehrt h durch eine numerische Funktion g repräsentierbar, so ist diese auch gleichzeitig eine Nutzenfunktion, die eine vollständige und transitive Relation repräsentiert, und h ist rational bezüglich dieser Relation.

Die folgenden beiden Sätze werden durch die obigen Bemerkungen und die Theoreme 7.1 und 7.2 sofort einsichtig.

Theorem 7.6

Sei X eine nicht leere, endliche Menge und $\mathcal{B}$ wie üblich definiert. Ferner sei $\succsim$ eine vollständige und transitive Relation auf X. Dann gibt es eine AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$, die bezüglich $\succsim$ rational und repräsentierbar ist.

Theorem 7.7

Sei X eine abzählbare, nicht leere Menge und $\succsim$ eine vollständige Ordnung auf X, die eine AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$ rationalisiert. Dann ist h repräsentierbar.

Ist eine AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$ gegeben, so stellt sich die Frage, ob diese repräsentierbar ist. Eine Bedingung, unter der das zutrifft, ist das Kongruenzaxiom, wenn X endlich ist. Im Theorem 6.9 wurde nachgewiesen, daß eine Auswahlkorrespondenz unter Voraussetzung dieser Prämisse stets regulär-rational ist, und nach Theorem 7.1 ist sie dann repräsentierbar.
Wie durch das folgende Beispiel demonstriert wird, braucht nicht jede AWK repräsentierbar zu sein. Erinnern wir uns an die lexikographische Ordnung, über die in diesem Paragraphen in Zusammenhang mit der Repräsentierbarkeit von Relationen durch numerische Funktionen schon einmal gesprochen wurde! Als die Menge der Alternativen wählen wir den $\mathbb{R}^2_+$. Das System $\mathcal{B}$ der Budgetmengen wird dadurch festgelegt, daß für jedes $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$

$$B(a,b) = \{z\in\mathbb{R}^2_+ \mid z=(a,b) \vee (z_1<a) \vee (z_1=a \wedge z_2<b)\}.$$

Ferner sei $h(B(a,b))=(a,b)$. Aus der Annahme, h würde von einer numerischen Funktion $g\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ repräsentiert, folgt für jedes $a\in\mathbb{R}_{++}$, daß das Intervall $[\inf g(a,\mathbb{R}),\ \sup g(a,\mathbb{R})]$ nicht degeneriert ist und daß für $a\neq a'$ auch $I_a\cap I_{a'}=\emptyset$. Wir erhalten wie früher eine eineindeutige Abbildung der positiven reellen Zahlen in eine Teilmenge der paarweise disjunkten Intervalle auf der reellen Zahlengeraden. Das ist aber ein Widerspruch, da diese Intervalle nur eine abzählbare Menge bilden. Andererseits ist aber die oben definierte AWK regulär-rational und erfüllt nach Theorem 6.9 das Kongruenzaxiom.
Wie soeben gezeigt wurde, gewährleistet das Axiom (CA) allein die Repräsentierbarkeit einer AWK durch eine numerische Funktion nicht. Nimmt man jedoch zu diesem noch eine weitere Voraussetzung hinzu, so kann sogar nachgewiesen werden (vgl. Richter (1971, S. 48-49)), daß diese beiden Bedingungen zusammen notwendig und hinreichend für die Repräsentierbarkeit von h sind. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes. Um ihn angemessen formulieren zu können, erinnern wir uns an die schon früher verwandte Äquivalenzrelation:

$$xJy \Leftrightarrow (xWy \wedge yWx) \vee x=y.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen von X bezüglich J bezeichnen wir wieder mit $X|J$. Über $X|J$ wird eine Relation $X|W$ erklärt durch:

Definition 7.3

Sei $\alpha, \beta \in X|J$ und $\alpha \neq \beta$.
$\alpha\ X|W\ \beta :\Leftrightarrow (\exists x,y \in X)[\alpha=[x] \wedge \beta=[y] \wedge xWy]$.

Theorem 7.8

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist repräsentierbar $\Longleftrightarrow$

(a) h erfüllt das Kongruenzaxiom (CA),

(b) Es gibt eine Funktion $u': X|J \to \mathbb{R}$ derart, daß
$(\forall [x],[y] \in X|J)[[x]\ X|W\ [y] \Rightarrow u'([x])>u'([y])]$.

Beweis:

1. "$\Rightarrow$": Ist h repräsentierbar, so gibt es nach den obigen Bemerkungen eine Relation $\succsim$, bezüglich welcher h regulär-rational ist. Daher folgt (a) unmittelbar mit Theorem 6.9. Um nachzuprüfen, ob auch (b) erfüllt ist, vergegenwärtigen wir uns, daß es eine reellwertige Funktion u gibt, die h repräsentiert. Wir setzen dann
$$u'(\alpha) := u(x) \quad \text{für } x \in \alpha \text{ und } \alpha \in X|J.$$
Da aus $[x]\ X|W\ [y]$ xWy folgt, impliziert die Repräsentierbarkeit von h $u(x) \gneqq u(y)$, so daß hieraus und aus $[x] \neq [y]$ $u'([x])>u'([y])$ folgt.
2. "$\Leftarrow$": Definieren wir die Funktion g durch
$$(1) \quad g(x) := u'([x]), \quad x \in X,$$
so haben wir nun nachzuweisen, daß für jedes beliebige $B \in \mathcal{B}$
$$h(B) = \{x | x \in B \wedge (\forall y \in B)[g(x) \geq g(y)]\} =: C^0.$$
Die Inklusion $h(B) \subseteq C^0$ folgt unmittelbar, denn $x \in h(B)$ impliziert xVy. Infolgedessen gilt $u'([x]) \geq u'([y])$ und damit auch $g(x) \geq g(y)$.
Wir beweisen nun, daß auch $C^0 \subseteq h(B)$ zutrifft. Da h(B) nicht leer ist und ferner $h(B) \subseteq C^0$, gibt es ein $x^1 \in h(B)$ und ein $x^2 \in C^0$. Da $u'([x^2]) \geq u'([x^1])$, folgt mit (1)
$$(2) \qquad g(x^2) \geq g(x^1).$$
Von $x^1 V x^2$ können wir auf
$$[x^1]\ X|W\ [x^2] \vee [x^1] = [x^2]$$
schließen. Im Fall, daß $[x^1]\ X|W\ [x^2]$, ergibt sich aus der Definition von g und Voraussetzung (b)

$$g(x^1) = u'([x^1]) > u'([x^2]) = g(x^2)$$

im Widerspruch zu (2).
Im 2. Fall erhalten wir infolge von $x^2 W x^1$, $x^1 \varepsilon h(B)$ und $x^2 \varepsilon B$ mit Hilfe von (CA) auch $x^2 \varepsilon h(B)$.

q.e.d.

7.2 Repräsentierbarkeit auf kompetitiven Budgeträumen

Durch die Definition 7.1 wurde der Begriff "ordnungsdicht" eingeführt. In der nächsten Definition wird erklärt werden, was unter dem Begriff "dicht" bezüglich einer Relation zu verstehen ist.

Definition 7.4

Sei G eine Relation über X.

(a) Eine Teilmenge A von X heißt "dicht" in X bezüglich der Relation G genau dann, wenn für alle $x,y \in X \setminus A$ gilt:

$$xGy \Rightarrow (\exists z \varepsilon A)[xGz \wedge zGy].$$

(b) Eine Teilmenge A von X heißt "partial-dicht" in X bezüglich G genau dann, wenn für alle $x,y \in X \setminus A$ gilt:

$$xGy \Rightarrow (\exists z \varepsilon A)[(xGz \wedge \neg(yGz)) \vee (zGy \wedge \neg(zGx))].$$

Anmerkung 7.2

Wie unmittelbar einzusehen ist, gilt für jede bezüglich einer asymmetrischen Relation G in X dichten Menge A, daß diese auch partial-dicht in X bezüglich G ist.

Die obigen Definitionen führen zu einer Verallgemeinerung von Theorem 7.3.

Lemma 7.1

Sei $\succ$ eine irreflexive und transitive Relation auf einer Menge X. Gibt es ferner eine abzählbare und bezüglich $\succ$ partial-dichte Teilmenge von X, so existiert ein Homomorphismus von $\langle X, \succ \rangle$ in

$\langle$ IR, >$\rangle$, d.h. es gibt eine Funktion f: $X \to$ IR derart, daß für alle $x,y \in X$ gilt:

$$x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y).$$

Der Beweis dieser Behauptung kann bei Richter (1971, S.49) nachgelesen werden.
Unter Verwendung von Lemma 7.1 läßt sich der nächste Satz beweisen (vgl. Richter (1971, S.51-52)). Erinnern wir uns daran, daß eine AWK $h: \mathcal{B}' \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ Nachfragekorrespondenz genannt wird, wenn die Budgetmengen $B \in \mathcal{B}'$ von der Form $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \wedge px \leq M\}$, wobei $p>0$ und $M \geq 0$, sind. Zur Vorbereitung dieses Satzes führen wir noch eine Definition ein.

Definition 7.5

Eine repräsentierbare AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt "monoton" repräsentierbar genau dann, wenn für alle $x,y \in X$ gilt:

$$x \geq y \Rightarrow g(x) > g(y),$$

wobei g die AWK h repräsentiert.

Theorem 7.9

Sei $h: \mathcal{B}' \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine Nachfragekorrespondenz.
Gilt ferner:
(a) Die Menge $D(h) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} h(B)$ ist konvex,
(b) $h(B)$ ist abgeschlossen für alle $B \in \mathcal{B}'$ und
(c) h ist regulär-rational,
so ist h repräsentierbar. Erfüllt h außerdem die Budgetgleichung, so ist h monoton repräsentierbar.

Beweis:
1. Teil: Definieren wir zunächst die Relation U durch

$$xUy :\Leftrightarrow xVy \vee x>y, \ \forall x,y \in X.$$

Ferner sei U^* die transitive Hülle von U beschränkt auf $Y = D(h) \cup Q^n_+$, wobei Q^n_+ die Menge der Vektoren aus $\mathbb{R}^n_+$ mit nicht negativen rationalen Komponenten bezeichnet. Wir definieren ferner eine Äquivalenzrelation "$\sim$" über Y durch:

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; (xU^{*}y \wedge yU^{*}x) \vee x=y.$$

Die Relation "$\sim$" zerlegt Y in eine Menge von Äquivalenzklassen, d.h. für beliebiges $x \in Y$ ist die Äquivalenzklasse von x durch $[x] = \{y \mid y \in Y \wedge y \sim x\}$ festgelegt. Ferner werden noch die Relationen $U_{\succ}$, $U^{*}_{\succ}$, $V_{\succ}$ und $W_{\succ}$ definiert durch:

$$xU_{\succ}y \;:\Leftrightarrow\; x,y \in Y \wedge xU\,y \wedge \neg(yUx)$$
$$xU^{*}_{\succ}y \;:\Leftrightarrow\; x,y \in Y \wedge xU^{*}y \wedge \neg(yU^{*}x)$$
$$xV_{\succ}y \;:\Leftrightarrow\; x,y \in Y \wedge xVy \wedge \neg(yVx)$$
$$xW_{\succ}y \;:\Leftrightarrow\; x,y \in Y \wedge xWy \wedge \neg(yWx)$$

Wir führen ferner noch noch eine Relation P auf $Y|\sim$ durch die Definition:

$$[x]P[y] \;:\Leftrightarrow\; (\exists u \in [x])(\exists v \in [y])[uU^{*}_{\succ}v]$$

ein. Offensichtlich ist P irreflexiv und transitiv.

2. Teil: Es soll nun gezeigt werden, daß die Quotientenmenge $Q^{n}_{+}|\sim$ dicht in $Y|\sim$ bezüglich der Relation P ist. Wir betrachten deshalb zwei beliebige Äquivalenzklassen $[\bar{x}]$, $[\bar{y}]$ mit:

$$[\bar{x}],\ [\bar{y}] \in Y|\sim \setminus Q^{n}_{+}|\sim \;\subseteq D(h)|\sim \quad \text{und}$$
$$[\bar{x}]P[\bar{y}].$$

Hieraus folgt per definitionem

$$(\exists u,v \in Y)[u \sim \bar{x} \wedge v \sim \bar{y} \wedge uU^{*}_{\succ}v].$$

1. Fall: $uU_{\succ}v$ bzw. $uUv \wedge \neg(vUu)$. Da $u,v \in D(h)$, gilt $uV_{\succ}v$. Gehen wir auf die Definition von $V_{\succ}$ zurück, so erhalten wir:

$$uV_{\succ}v \Leftrightarrow (\exists \bar{B} \in \mathcal{L}')[(u \in h(\bar{B}) \wedge v \in \bar{B}) \wedge (\forall B \in \mathcal{L}')[v \notin h(B) \vee u \notin B]].$$

Es gilt demnach

$$(1) \quad u \in h(\bar{B}) \wedge v \in (\bar{B} \setminus h(\bar{B})).$$

Da D(h) konvex und $h(\bar{B})$ abgeschlossen ist, gibt es ein $\bar{\gamma} \in]0,1[$ derart, daß

$$(2) \quad w = \bar{\gamma}v + (1-\bar{\gamma})u \in D(h) \setminus h(\bar{B}),$$

so daß wegen (1) auch uVw zutrifft.

h ist nach Voraussetzung (c) regulär-rational, so daß mit Theorem 6.9 auf die Gültigkeit des Kongruenzaxioms geschlossen werden kann. Deshalb gilt auch

(3) $uV_{\succ}w$.

Da $w\varepsilon D(h)$, gibt es ein $B(\tilde{p},\tilde{M})$ derart, daß $w\varepsilon h(\tilde{p},\tilde{M})$. Mit (3) können wir dann auf $\tilde{p}w < \tilde{p}u$ schließen, so daß wir schließlich mit (2) $\tilde{p}w > \tilde{p}v$ gewinnen. Da Q_+^n dicht in IR_+^n ist, gibt es ein $z^1\varepsilon Q_+^n$, für das

$$z^1 > v \wedge \tilde{p}w > \tilde{p}z^1$$

zutrifft. Dieses Ergebnis führt mit (3) zusammen auf

$$uV_{\succ}w \wedge wVz^1 \wedge z^1 > v,$$

so daß $uU^*_{\succ}z^1 \wedge z^1U^*_{\succ}v$. Deshalb gilt:

$$[u]P[z^1] \wedge [z^1]P[v]$$

bzw. $\quad [\bar{x}]P[z^1] \wedge [z^1]P[\bar{y}]$,

womit wir schließlich gewonnen haben, daß $Q_+^n|\sim$ bezüglich P dicht in $Y|\sim$ ist.

2. Fall: $(\exists u^1,\ldots,u^n)[uU_{\succ}u^1 \wedge\ldots\wedge u^nU_{\succ}v]$.

1. Unterfall: $u^1\varepsilon D(h)$. Dieser Fall ist zurückführbar auf den ersten, so daß demnach folgendes gilt:

$$(\exists z^1\varepsilon Q_+^n)[uU^*_{\succ}z^1 \wedge z^1U^*_{\succ}u^1 \wedge u^1U^*_{\succ}u^2],$$

wobei auch $u^2=v$ sein kann. Da U^* transitiv ist, erhalten wir auch im 1. Unterfall

$$uU^*_{\succ}z^1 \wedge z^1U^*_{\succ}v.$$

2. Unterfall: $u^1\notin D(h)$. Da aber die Relation $U_{\succ}$ auf Y erklärt ist und $u^1\notin D(h)$ erfüllt ist, muß $u^1\varepsilon Q_+^n$ gelten. Setzen wir $u^1=z$, so ergibt sich wie vorhin $uU^*_{\succ}z^1\wedge z^1U^*_{\succ}v$. Damit erhalten wir in jedem Fall $[u]P[z^1] \wedge [z^1]P[v]$, bzw. $[\bar{x}]P[z^1] \wedge [z^1]P[\bar{y}]$, so daß also $Q_+^n|\sim$ bezüglich P dicht in $Y|\sim$ ist.

3. Teil: Nach Lemma 7.1 gibt es eine Funktion $f\colon D(h)|\sim \to IR$, so daß für alle $[x], [y]\varepsilon D(h)|\sim$ mit $[x]P[y]$

$$f([x]) > f([y])$$

erfüllt ist. Es werde nun eine Funktion g durch

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f([x])}{1+|f([x])|} & , \quad x\varepsilon D(h) \\[2ex] -1 & , \quad x\varepsilon IR_+^n\setminus D(h) \end{cases}$$

festgelegt. Für diese soll nachgewiesen werden, daß sie die gegebene AWK h repräsentiert; d.h. es ist zu zeigen:

Für ein beliebiges $\bar{B}\varepsilon\mathcal{L}'$ gilt

$$h(\bar{B}) = \{x \mid x\varepsilon\bar{B} \wedge (\forall y\varepsilon\bar{B})[g(x) \geqq g(y)]\} =: \Gamma .$$

Der Beweis ist erbracht, wenn wir gezeigt haben, daß

$$(*) \quad h(\bar{B}) \subseteq \Gamma \quad \text{und} \quad (**) \quad \Gamma \subseteq h(\bar{B})$$

erfüllt ist.

Zu $(*)$: Seien $\bar{x}\varepsilon h(\bar{B})$, $\bar{y}\varepsilon\bar{B}$ und $\bar{x}\neq\bar{y}$.

1. Fall: $\bar{y}\notin D(h)$. Dann aber folgt mit $g(\bar{y})=-1$ sofort, daß $g(\bar{x})>g(\bar{y})$ erfüllt ist.

2. Fall: $\bar{y}\varepsilon D(h)$. Da aber h regulär-rational ist, erfüllt h das Kongruenzaxiom, und es folgt aus $\bar{x}V\bar{y}$ unter Verwendung des zweiten Teils dieses Beweises, daß $g(\bar{x})\geqq g(\bar{y})$ erfüllt ist.

Zu $(**)$: Sei $\hat{x}\varepsilon\bar{B}$ und es gelte ferner

$$(4) \quad (\forall y\varepsilon B)[g(\hat{x})\geqq g(y)]$$

Annahme: $\hat{x}\notin h(\bar{B})$.

1. Fall: Gilt $\hat{x}\varepsilon D(h)$, so führt dies auf $g(\hat{x}) = \frac{f([\hat{x}])}{1+|f([\hat{x}])|}$.
Da $h(\bar{B})$ nicht leer ist, gibt es ein $\bar{y}\varepsilon h(\bar{B})$, so daß mit (4) $g(\hat{x}) = \frac{f([\hat{x}])}{1+|f([\hat{x}])|} \geqq g(\bar{y})$ erfüllt ist. Mit Hilfe des Kongruenzaxioms erhalten wir aber $\bar{y}W\hat{x}$ und $\neg(\hat{x}W\bar{y})$, so daß sich $f(\bar{y})>f(\hat{x})$ und damit $g(\bar{y})>g(\hat{x})$ ergibt, was im Widerspruch zu dem vorangehenden Ergebnis steht.

2. Fall: Gilt $\hat{x}\notin D(h)$, so folgt $g(\hat{x})=-1$. Da ein $\tilde{x}\varepsilon h(\bar{B})$ existiert, erhalten wir damit sofort einen Widerspruch zu (4).

Damit haben wir in allen Fällen das Ergebnis $\hat{x}\varepsilon h(\bar{B})$ gewonnen.

4. Teil: Es ist noch zu zeigen, daß die reellwertige Funktion g die Funktion h auf dem Bereich D(h) monoton repräsentiert. Sei deshalb $x,y\varepsilon D(h)$ mit $x\succ y$ vorgegeben. Dann folgt unmittelbar $xU_{\succ}y$ und damit auch $f([x])>f([y])$ bzw. $g(x)>g(y)$.

q.e.d.

Anmerkung 7.3

Wie dieser Beweis zeigt, läßt sich eine Nachfragekorrespondenz auch dann repräsentieren, wenn die Konvexitätsbedingung an abzählbar vielen Stellen verletzt ist, d.h. wenn

$\{x \mid x \in D(h) \wedge (\exists y \in D(h))[xSy \wedge (\forall \gamma \in]0,1[)[\gamma x+(1-\gamma)y \notin D(h)]]\}$ [1]

abzählbar ist. Zum Beweis dieser Behauptung genügt es, diese abzählbare Menge zu Q_+^n hinzuzunehmen.

Korollar 7.1

Sei $h: \mathcal{L}' \to 2^{\mathbb{R}_+^n}$ eine Nachfragefunktion.

Gilt ferner:

(a) $D(h) = \bigcup_{B \in \mathcal{L}'} h(B)$ ist konvex,

(b) h genügt dem Axiom (SA') und

(c) h erfüllt die Budgetgleichung $p \cdot h(p,M) = M$,

so ist h monoton repräsentierbar auf D(h) .

Der Beweis ergibt sich sofort mit Theorem 7.9, wenn wir bedenken, daß wir für Nachfragefunktionen an die Stelle des Kongruenzaxioms das Starke Axiom setzen können. Die Gültigkeit des Kongruenzaxioms folgt im vorangehenden Satz aus der Voraussetzung (c).

Auch das nächste Theorem liefert Bedingungen für die Repräsentierbarkeit von Nachfragekorrespondenzen. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine Repräsentation g von h, die von oben halbstetig ist.

Das nachfolgende Lemma benötigen wir zum Beweis dieses Satzes.

Lemma 7.2

Sei $h: \mathcal{L}' \to 2^{\mathbb{R}_+^n}$ eine Nachfragekorrespondenz auf dem Bereich der kompetitiven Budgetmengen und $D(h) \subseteq \mathbb{R}_+^n$.

Ferner sei die Budgetgleichung:

---

[1] Die Relation S wurde in Definition 3.4 erklärt durch

$$xSy :\Leftrightarrow x \neq y \wedge xVy.$$

(H): $(\forall(p,M)\varepsilon\, IR^{n+1}_{++})[x\varepsilon h(p,M) \Rightarrow px=M]$,
das Schwache Axiom (WA) und die Bedingung (A): $(\forall x^a, x^b \varepsilon D(h))\,[(x^a \varepsilon h(p^a,M^a) \wedge x^b \varepsilon B(p^a,M^a) \setminus h(p^a,M^a)) \Rightarrow$
$(\exists x^o \varepsilon D(h) \setminus h(p^a,M^a))(\exists t \varepsilon]0,1[)[x^o = tx^a + (1-t)x^b]]$
erfüllt.
Dann ist für jedes $x^a \varepsilon D(h)$ die Menge $\{y | y \varepsilon D(h) \wedge x^a P^* y\}$ offen in $D(h)$.

Beweis:
Sei $x^a, x^b \varepsilon D(h)$ und es gelte ferner $x^a P^* x^b$.
Wir wollen zeigen:

$$(\exists \varepsilon > 0)\,[x \varepsilon U_\varepsilon(x^b) \cap D(h) \Rightarrow x^a P^* x].$$

Mit der Definition von P^* können wir schließen:

$$(\exists x^1 \varepsilon D(h))[x^a = x^1 \wedge x^1 \tilde{P} x^b) \vee (x^a P^* x^1 \wedge x^1 \tilde{P} x^b)].$$

(i) Gilt $M^1 > p^1 x^b$, so folgt unsere Behauptung unmittelbar.
(ii) Sei nun $M^1 = p^1 x^b$. Da $x^b \varepsilon B(p^1,M^1)$ und $x^b \notin h(p^1,M^1)$, können wir die Bedingung (A) anwenden und erhalten

$$(\exists x^o \varepsilon D(h))(\exists \bar{t} \varepsilon]0,1[)[x^o = \bar{t}x^1 + (1-\bar{t})x^b \wedge x^o \notin h(p^1,M^1)].$$

Da $p^1 x^o = p^1 x^1$ und $x^1 \neq x^o$, können wir das Axiom (WA) anwenden und erhalten $\neg(x^o V x^1)$. Infolgedessen führt die Definition von V auf

$$(1) \quad (\forall(p,M)\varepsilon\, IR^{n+1}_{++})[x^o \notin h(p,M) \vee x^1 \notin B(p,M)].$$

Da x^o ein Element von D(h) ist, existiert eine Preis-Einkommen-Situation (p^o,M^o), so daß $x^o \varepsilon h(p^o,M^o)$. Deshalb erhalten wir mit (1) $x^1 \notin B(p^o,M^o)$, i.e. $p^o x^1 > M^o$. Dieses Ergebnis führt zusammen mit $p^o x^o = \bar{t}x^1 p^o + (1-\bar{t})x^b p^o$ auf $x^b p^o < M^o$. Damit erhalten wir

$$(\exists U_{\varepsilon'}(x^b))[\forall x \varepsilon U_{\varepsilon'}(x^b) \cap D(h) \Rightarrow p^o x < M^o],$$

so daß für alle $x \varepsilon U_{\varepsilon'}(x^b) \cap D(h)$ die Bedingung $x^o \tilde{P} x$ erfüllt ist. Gilt $x^a = x^1$, so können wir von $x^1 \tilde{P} x^o$ auf $x^a P^* x^o$ schließen und erhalten damit für alle $x \varepsilon U_{\varepsilon'}(x^b) \cap D(h)$ $x^a P^* x$. Gilt andererseits $x^a P^* x^1 \wedge x^1 \tilde{P} x^o$, so erhalten wir ebenfalls für alle $x \varepsilon U_{\varepsilon'}(x^b) \cap D(h)$ $x^a P^* x$, womit in allen Fällen der Satz bewiesen ist.

Mit dem soeben bewiesenen Lemma 7.2 können wir die folgende Aussage über die Repräsentierbarkeit von Nachfragekorrespondenzen beweisen.

Theorem 7.10

Sei $h: \mathcal{L}' \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine Nachfragekorrespondenz, deren Wertebereich $D(h) = \bigcup_{B(p,M)\in\mathcal{L}'} h(B(p,M))$ offen in $\mathbb{R}^n_+$ ist.

Setzen wir ferner das Starke Axiom (SA), die Bedingungen (H) und (A) des vorangegangenen Lemmas und die "partielle Lipschitz-Bedingung bezüglich M":

Für jede beliebige Preis-Einkommen-Situation (p^o,M^o) gibt es ein $\varepsilon>0$ und ein $K>0$ derart, daß

$$(\forall M'>0)[|M'-M^o|<\varepsilon \Rightarrow (\forall y''\varepsilon h(p^o,M^o))(\exists y'\varepsilon h(p^o,M')) \\ [||y'-y''|| \leqq K|M^o-M'|]],$$

voraus, so ergeben sich folgende Resultate:

(a) Es gibt eine Funktion $f: D(h) \to \mathbb{R}$ derart, daß
$$(\forall x,y\varepsilon D(h))[xP^*y \Rightarrow f(x)>f(y)]$$

(b) Es gibt eine von oben halbstetige Funktion $g: D(h) \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $(p,M)\varepsilon \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ gilt:
$$h(p,M) = \{x\varepsilon D(h)|px\leqq M \wedge (\forall y\varepsilon D(h))[py\leqq M \Rightarrow u(x)\geqq u(y)]\}.$$

Beweis:

Offensichtlich impliziert das Starke Axiom, daß P^* eine irreflexive und asymmetrische Relation ist. Außerdem ist P^* nach Voraussetzung transitiv. Um (a) zu überprüfen, zeigen wir erst, daß eine abzählbare Teilmenge C von D(h) existiert derart, daß C partial-dicht in D(h) bezüglich P^* ist (vgl. Definition 7.4). Wir können dann ein Ergebnis von Richter (1971, p.49) anwenden, und erhalten infolgedessen eine nicht-negative, beschränkte Funktion $f: D(h) \to \mathbb{R}_+$ derart, daß für alle $x,y\varepsilon X$ mit xP^*y auch $f(x)>f(y)$ gilt. Zu diesem Zweck sei Q^n_+ die Menge der Vektoren aus D(h) mit rationalen Komponenten. Wir betrachten ferner x^o, $x^1\varepsilon D(h)\setminus Q^n_+$ mit $x^oP^*x^1$. Da gemäß Lemma 7.2 die Menge $\{x|x^oP^*x\}$ offen in D(h) ist, gibt es ein $\hat{\varepsilon}>0$ und ein $z\varepsilon D(h)\cap U_{\hat{\varepsilon}}(x^1)$ [1] mit rationalen Komponenten, so daß $x^oP^*z \wedge zP^*x^1$, i.e., $x^oP^*zP^*x^1$ unmittelbar folgt. Da P^* asymmetrisch

---

1) Für $\varepsilon>0$ bezeichnet $U_\varepsilon(x)$ die ε-Umgebung von x.

ist, ist auch Q^n partial-dicht in D(h) bezüglich P^*. Demzufolge existiert eine beschränkte Funktion f: $D(h) \to \mathbb{R}_+$ derart, daß $xP^*y \Rightarrow f(x)>f(y)$.

Wir beweisen nun (b).

Da f beschränkt ist, können wir eine Funktion g: $D(h) \to \mathbb{R}$ dadurch definieren, daß wir

$$g(y) = \lim\sup f(y),\ y\varepsilon D(h)$$

setzen. Unter $g(y) = \lim\sup f(y)$ versteht man im allgemeinen, daß g(y) das Infimum der Menge der reellen Zahlen $\sup\{f(z)|z\varepsilon U\}$ ist, wobei U über die Menge aller offenen Umgebungen von y in D(h), die mit $\mathcal{U}_y$ bezeichnet wird, variiert. Diese Funktion ist bekanntlich von oben halbstetig (vgl. Mc Shane,E.J. und T. Botts (1952, S.75)).

Wir zeigen zunächst:

$$(1)\quad (\forall x^a,x^b\varepsilon D(h))[x^aP^*x^b \Rightarrow g(x^a)>g(x^b)].$$

Trifft $x^aP^*x^b$ zu, so können wir gemäß Lemma 7.2 ein $z\varepsilon D(h)$ finden, so daß $x^aP^*zP^*x^b$ gilt. Da die Menge $\{x|x\varepsilon D(h) \wedge zP^*x\}$ offen ist, gibt es eine offene Umgebung $U_{\bar{\varepsilon}}(x^b) \subseteq D(h)$ derart, daß alle $v'\varepsilon U_{\bar{\varepsilon}}(x^b)$ der Bedingung zP^*v' genügen. Gemäß dem ersten Teil der Behauptung gilt:

$$(\forall v'\varepsilon U_{\bar{\varepsilon}}(x^b))[f(z)>f(v')].$$

Infolgedessen erhalten wir die Beziehung

$$f(x^a) > f(z) \geqq \sup\{f(v')|v'\varepsilon U_{\bar{\varepsilon}}(x^b)\}.$$

Hiervon führt die Definition von g auf

$$\begin{aligned} g(x^b) &= \inf\{\sup\{f(s)|s\varepsilon U\}|\ U\varepsilon\mathcal{U}_{x^b}\} \\ &\leqq \sup\{f(v')|v'\varepsilon U_{\bar{\varepsilon}}(x^b)\} \\ &\leqq f(z) < f(x^a) \leqq g(x^a). \end{aligned}$$

Demnach gilt $x^aP^*x^b \Rightarrow g(x^a)>g(x^b)$. Gemäß Sakai (1977, p.124) definieren wir die Menge w(p,M) durch

$$w(p,M) = \{x|x\varepsilon D(h) \wedge px\leqq M \wedge (\forall y\varepsilon D(h))[py\leqq M \Rightarrow g(x)\geqq g(y)]\}$$

und zeigen, daß $h(p,M)=w(p,M)$.

Zunächst beweisen wir, daß für alle Preis-Einkommen-Situationen (p,M) die Beziehung $h(p,M)\subseteq w(p,M)$ zutrifft. Nehmen wir an, es existierte ein $(\bar{p},\bar{M})$ derart, daß

$$\bar{y}\ \varepsilon\ h(\bar{p},\bar{M}) \wedge \bar{y} \notin w(\bar{p},\bar{M})$$

gilt. Infolgedessen muß ein $\tilde{y}\varepsilon D(h)$ mit

(2) $\bar{p}\cdot\tilde{y} \leqq \bar{M} \wedge g(\widetilde{y}) > g(\bar{y})$
existieren. Wir unterscheiden dann zwei Fälle:
(i): $\tilde{y}\notin h(\bar{p},\bar{M})$. Da jedoch $\tilde{y}\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$, trifft $\bar{y}\tilde{P}\tilde{y}$ zu, so daß wir mit (1) $g(\bar{y})>g(\widetilde{y})$ erhalten, was im Widerspruch zu (2) steht.
(ii): $\tilde{y}\varepsilon h(\bar{p},\bar{M})$. Da nach (2) $g(\tilde{y})>g(\bar{y})$ zutrifft, gibt es ein $\tilde{\varepsilon}>0$ mit der Eigenschaft, daß

(3) $(\forall z\varepsilon U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{y})\cap D(h))[g(\tilde{y})>g(z)]$.

Dieser Schluß ist zulässig, weil $g\colon D(h) \to \mathbb{R}$ von oben halbstetig ist. Wenden wir jetzt die partielle Lipschitzbedingung bezüglich M an, so können wir darauf schließen, daß ein $\varepsilon^0>0$ und ein $K^0>0$ existiert, so daß

(4) $(\forall M>0)[|M-\bar{M}|<\varepsilon^0 \Rightarrow (\exists v\varepsilon h(\bar{p},M))[||v-\tilde{y}|| \leqq K^0|M-\bar{M}|]]$.

Definieren wir
$$\bar{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon^0}{2}, \frac{\tilde{\varepsilon}}{2K^0}\} ,$$
und $\bar{M}^0=\bar{M}+\bar{\varepsilon}$, so führt (4) auf
$$(\exists\bar{z}\varepsilon h(\bar{p},\bar{M}^0))[||\bar{z}-\tilde{y}|| \leqq K^0|\bar{M}^0-\bar{M}| = K^0\ \bar{\varepsilon} \leqq K^0\cdot\frac{\tilde{\varepsilon}}{2K^0}<\tilde{\varepsilon}\ ].$$
Infolgedessen gilt $\bar{z}\varepsilon U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{y})\cap D(h)$. Indem wir die Bedingung (H) verwenden, können wir von $\tilde{y}\varepsilon h(\bar{p},\bar{M})$ auf $\bar{p}\cdot\tilde{y}=\bar{M}$ schließen, so daß $\bar{p}\cdot\tilde{y}<\bar{M}^0$. Da hieraus $\bar{z}\tilde{P}\tilde{y}$ folgt, können wir (1) anwenden und erhalten $g(\bar{z})>g(\tilde{y})$. Da aber $\bar{z}\varepsilon U_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{y})$, führt (3) auf $g(\tilde{y})>g(\bar{z})$ und damit zu einem Widerspruch. Also müßte $\tilde{y}\notin h(\bar{p},\bar{M})$ gelten, aber auch das führt mit (i) zu einem Widerspruch. Infolgedessen erhalten wir die Beziehung

$h(\bar{p},\bar{M}) \subseteq w(\bar{p},\bar{M})$.

Um die Umkehrung zu beweisen, betrachten wir ein $x^1\varepsilon w(p,M)$. Gemäß der Definition von $w(p,M)$ folgt hieraus

(5) $px^1 \leqq M \wedge (\forall z\varepsilon D(h))[pz\leqq M \Rightarrow g(x^1)\geqq g(z)]$.

Angenommen, $x^1\notin h(p,M)$. Da $h(p,M)\neq\emptyset$, existiert ein $x^2\varepsilon h(p,M)$. Die Bedingung (H) impliziert, daß $px^2=M$. Da $x^1\varepsilon B(p,M)$, erhalten wir $x^2\tilde{P}x^1$, und somit auch $g(x^2)>g(x^1)$, im Widerspruch zu (5).

q.e.d.

Korollar 7.2

Setzen wir die Hypothesen von Theorem 7.10 voraus, und ist für $x^1,x^2\varepsilon D(h)$ die Beziehung $x^1\neq x^2$ erfüllt, so gilt folgendes:

(i) $g(x^1) \geqq g(x^2) \Rightarrow g(x^t) \geqq g(x^2)$, wobei $x^t = (1-t)x^1 + tx^2$ und $t \varepsilon]0,1[$, $x^t \varepsilon D(h)$

(ii) $x^1 \geq x^2 \Rightarrow g(x^1) > g(x^2)$.

Beweis:
Zu (i): Da D(h) konvex ist, gilt $x^t \varepsilon D(h)$, Damit gibt es (p^t, M^t) mit $x^t \varepsilon h(p^t, M^t)$. Da $x^t \cdot p^t = M^t = (1-t)x^1 p^t + tx^2 p^t$, folgt hieraus $p^t \cdot x^1 \leqq M^t \vee p^t \cdot x^2 \leqq M^t$. Da nach Theorem 7.10 die Korrespondenz h auf D(h) durch g: D(h) → IR repräsentiert wird, folgt aus $p^t \cdot x^1 \leqq M^t$, daß $g(t) \geqq g(x^1)$ und damit auch $g(t) \geqq g(x^2)$ erfüllt ist. Gilt hingegen $p^t \cdot x^2 \leqq M^t$, so folgt aus dem gleichen Grund, daß auch $g(t) \geqq g(x^2)$ zutrifft.
Zu (ii): Da $x^1 \varepsilon D(h)$, gibt es (p^1, M^1) mit $x^1 \varepsilon h(p^1, M^1)$ und $p^1 \cdot x^1 = M^1$. Hieraus folgt unmittelbar $p^1 \cdot x^2 < M^1$. Damit gilt auch $x^1 \tilde{P} x^2$, woraus sofort gemäß Theorem 7.10 $g(x^1) > g(x^2)$ folgt.

Korollar 7.3

Vorausgesetzt seien die Hypothesen von Theorem 7.10. Dann gibt es eine vollständige und transitive Relation $\overset{0}{\succsim}$, die h rationalisiert und eine Erweiterung von P^* ist, d.h. es gilt

$$xP^*y \Rightarrow x \overset{0}{\succsim} y, \quad \forall x,y \varepsilon D(h)$$

Zum Beweis: Die obige Behauptung wird unmittelbar einsichtig, wenn wir bedenken, daß h auf D(h) von einer Funktion g: D(h) → IR repräsentiert werden kann und wir dann auf die Bedeutung dieses Begriffes zurückgehen. Die Relation $\overset{0}{\succsim}$ kann so definiert werden, daß für alle $x,y \varepsilon D(h)$ die Beziehung $x \overset{0}{\succsim} y$ nur gilt, wenn $g(x) \geq g(y)$. Damit ist diese Relation vollständig und transitiv, und h ist rational bezüglich $\overset{0}{\succsim}$. Da aus xP^*y $g(x) > g(y)$ folgt, gilt auch $x \overset{0}{\succsim} y$. q.e.d.

Setzen wir anstelle des Starken Axioms (SA) das Postulat (SA'), so ist h(p,M) eine Funktion. Dann können aber auch die übrigen Prämissen von Theorem 7.10 so abgeschwächt werden, daß wir eine Satz über Nachfragefunktionen, der sich nur geringfügig von einem Theorem von Sondermann (1982, 177-78) unterscheidet, gewinnen.

Theorem 7.11

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine Nachfragefunktion, deren Wertebereich $D(h) = \bigcup_{B\varepsilon\mathcal{B}'} h(B)$ offen in $\mathbb{R}^n_+$ und konvex ist .

Erfüllt h ferner die Hypothesen

(H), und (SA'), so gilt folgendes:

(a) Es gibt eine Funktion $f: D(h) \to \mathbb{R}$ derart, daß
$$(\forall x,y\varepsilon D(h))[xHy \Rightarrow f(x)>f(y)].$$

(b) Es gibt eine von oben halbstetige Funktion $g: D(h) \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $(p,M)\varepsilon \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ gilt:
$$x=h(p,M) \Leftrightarrow (x\varepsilon B(p,M) \cap D(h) \wedge (\forall y\varepsilon B(p,M) \cap D(h))[y \neq x \Rightarrow g(x)>g(y)]).$$

(c) $g(x^1) \geqq g(x^2) \Rightarrow g(x^t)>g(x^2)$, wobei $x^t=(1-t)x^1+tx^2$, für $t\varepsilon]0,1[$ und $x^1 \neq x^2$, $x^t \in D(h)$.

(d) $(x^1 \geq x^2 \wedge x^1,x^2 \varepsilon D(h)) \Rightarrow g(x^1)>g(x^2)$

Beweis:

Zu (a): Zunächst ist nachzuprüfen, ob die Menge $\{x|x\varepsilon D(h) \wedge x^aHx\}$ für jedes $x^a\varepsilon D(h)$ offen in D(h) ist. Untersuchen wir jedoch den Beweis zu Lemma 7.2 Zeile für Zeile, so wird offenbar, daß anstelle des Starken Axioms (SA') schon das Schwache Axiom (WA') genügt, um nachzuweisen, daß $\{x|x\varepsilon D(h) \wedge x^aHx\}$ offen in D(h) ist. Die Bedingung (H) benötigen wir hier nicht, da diese nur zum Beweis des Falles (ii): $y\notin h(p,M)$ (vgl. S. 83) benötigt wurde.

Aus dem Beweis von Theorem 7.10 sehen wir sofort, daß eine beschränkte Funktion $f: D(h) \to \mathbb{R}_+$ existiert, derart, daß
$$xHy \Rightarrow f(x)>f(y).$$

Zu (b): Definieren wir wie im Theorem 7.10 eine Funktion $g: D(h) \to \mathbb{R}$, indem wir
$$g(y) = \limsup f(y), \quad y\varepsilon D(h),$$
setzen, so ergibt sich auf ähnliche Weise wie dort die Beziehung

(1) $x^aHx^b \Rightarrow g(x^a)>g(x^b)$.

Wir betrachten nun ein $\bar{x}=h(\bar{p},\bar{M})$ und zeigen, daß für dieses Element die Bedingung

$(\forall y \varepsilon B(\bar{p},\bar{M}) \cap D(h))[y \neq \tilde{x} \Rightarrow g(\tilde{x})>g(y)]$

erfüllt ist.

Angenommen, es gäbe ein $\bar{y}\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$, $\bar{y}\neq\bar{x}$, mit der Eigenschaft $g(\bar{x})\leqq g(\bar{y})$.

Da $h(\bar{p},\bar{M})$ nur aus einem Element besteht, muß $\bar{x}H\bar{y}$ gelten, so daß wir mit (1) auf $g(\bar{x})>g(\bar{y})$ schließen können, was im Widerspruch zu dem obigen Ergebnis steht.

Betrachten wir nun ein $\tilde{x}\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$ mit der Eigenschaft

(2) $(\forall y\varepsilon B(\bar{p},\bar{M}) \cap D(h))[y\neq\tilde{x} \Rightarrow g(\tilde{x})>g(y)]$

Nehmen wir $\tilde{x}\neq h(\bar{p},\bar{M})$ an! Da $h(\bar{p},\bar{M})\neq 0$, gibt es ein $\bar{x}\varepsilon B(\bar{p},\bar{M})$, so daß $\bar{x}=h(\bar{p},\bar{M})$. Hieraus folgt aber $\bar{x}H\tilde{x}$ und mit (1) $g(\bar{x})>g(\tilde{x})$, was im Widerspruch zu (2) steht.

Zu (c): Da D(h) konvex ist, gibt es für jedes $t\varepsilon]0,1[$ eine Preis-Einkommen-Situation (p^t,M^t) mit $x^t=h(p^t,M^t)$. Damit erhalten wir $p^tx^t=p^t\cdot(1-t)x^1+p^ttx^2$, woraus $p^tx^1\leqq M^t \vee p^tx^2\leqq M^t$ gefolgert werden kann.

Im Falle, daß $p^tx^1\leqq M^t$, erhalten wir x^tHx^1, und infolgedessen $g(x^t)\geqq g(x^1)$, womit wir auf $g(x^t)>g(x^2)$ schließen können.

Im Falle, daß $p^tx^2<M^t$, erhalten wir mit (1) unmittelbar $g(x^t)>g(x^2)$.

Der Beweis zu (d) ist trivial und bedarf keiner weiteren Erläuterungen.

Ein ähnliches Theorem wie das obige, das wir ohne Beweis anführen wollen, finden wir auch bei Hurwicz und Richter (1971, S.61). Dieser Satz wird für $x\varepsilon\mathbb{R}^n$ formuliert, so daß die Budgetmengen von der Form $\{x|x\varepsilon\mathbb{R}^n \wedge px\leqq M\}$ sind.

Theorem 7.12

Sei $\mathcal{L}'\subseteq 2^{\mathbb{R}^n}$, $\mathcal{L}'\neq\emptyset$ und $\emptyset\notin\mathcal{L}'$.

Erfüllt die Nachfragefunktion $h:\mathcal{L}'\rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ auf dem Bereich $D(h) = \bigcup_{B\varepsilon\mathcal{L}'} h(B)$ das Axiom (SA') und gilt für alle $x,y\varepsilon D(h)$ und alle $t\varepsilon]0,1[$:

$$xVy \wedge x\neq y \Rightarrow tx+(1-t)y \varepsilon D(h),$$

so gibt es eine transitive und vollständige Relation $\succsim$ auf D(h) mit folgenden Eigenschaften:

(a) $x=h(B) \Leftrightarrow (x\varepsilon B\cap D(h) \wedge (\forall y\varepsilon B\cap D(h))[x\succsim y])$

(b) $\{z|z\varepsilon \mathbb{R}^n \wedge z\succsim y\}$ ist für jedes $y\varepsilon \mathbb{R}^n$ abgeschlossen in $D(h)$,

(c) $y\succsim x \wedge x\neq y \wedge t\varepsilon]0,1[\wedge z=tx+(1-t)y\varepsilon D(h) \Rightarrow z\succ x$

(d) Es gibt eine Nutzenfunktion $u: D(h) \rightarrow \mathbb{R}$, die die Relation $\succsim$ repräsentiert und von oben halbstetig ist,

(e) $x\geq y \wedge x,y\varepsilon D(h) \Rightarrow x\succ y$.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen, so haben wir im wesentlichen darüber Kenntnisse gewonnen, unter welchen verschiedenartigen Bedingungen die Repräsentierbarkeit einer AWK gewährleistet ist. Diese implizieren jedoch nicht immer, daß h bezüglich der Relationen P^* oder W rational ist, sondern es kann im allgemeinen nur darauf geschlossen werden, daß irgendeine Relation, die h rationalisiert, existiert.

§8 Budgetpräferenzen

8.1 Repräsentation von Budgetpräferenzen

In den vorangegangenen Paragraphen untersuchten wir das Verhalten eines Handlungsträgers, der eine subjektive Vorstellung von dem Wert der Alternativen einer ihm zur Auswahl stehenden Menge besitzt. Wir können aber auch davon ausgehen, daß das Individuum die Wahlsituation, bzw. die Budgetmengen, bewertet und gelangen damit zu einer dualen Betrachtungsweise des rationalen Verhaltens eines Individuums.
Fassen wir die Wertvorstellung, die der Handlungsträger von den Alternativen der Budgetmengen besitzt, als "direkte" Präferenz auf, so ist es sinnvoll, seine Bewertung der Budgetmengen als "indirekte" Präferenz anzusehen. Entsprechend kann eine reelwertige Funktion, die eine Präferenzrelation auf der Menge X der Alternativen repräsentiert, als "direkte" Nutzenfunktion, eine reelwertige Funktion, die eine Präferenzrelation auf $\mathcal{B}$ repräsentiert, als "indirekte" Nutzenfunktion bezeichnet werden.
Formal betrachtet heißen eine direkte und eine indirekte Nutzenfunktion genau dann dual, wenn die von ihnen jeweils generierte Auswahlkorrespondenz die selbe ist.
In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, wie sich gewisse Eigenschaften der direkten Nutzenfunktionen auf die indirekten auswirken. Ebenso ist die Umkehrung dieses Problems von Interesse. Auch bei diesen Untersuchungen spielen Axiome, die als die dualen Postulate zu dem Starken Axiom oder dem Kongruenzaxiom angesehen werden können, eine zentrale Rolle.

Zunächst aber wollen wir unser Interesse dem Problem der Repräsentierbarkeit von Budgetpräferenzen zuwenden und führen daher den Begriff der "indirekten Nutzenfunktion" formal ein.

Definition 8.1

Gegeben sei ein Budgetraum $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ und eine Relation $\underline{\gg}$ auf $\mathcal{B}$.
Dann heißt die Funktion $\tilde{u}: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ eine "indirekte Nutzenfunktion" genau

dann, wenn:

$$(\forall B, B' \in \mathcal{B})[B \underline{\gg} B' \Leftrightarrow \tilde{u}(B) \geq \tilde{u}(B')] \text{ }^{1)}.$$

Da in den Theoremen 7.1 bis 7.3 die Elemente des Bereichs, auf dem die Relation erklärt ist, auch durchaus Budgetmengen sein können, lassen sich diese Sätze ohne Einschränkungen auf das Mengensystem $\mathcal{B}$ übertragen.

Lemma 8.1

Sei $\mathcal{B}$ endlich, aber nicht leer und $\underline{\gg}$ eine schwache Ordnung auf $\mathcal{B}$. Dann existiert eine indirekte Nutzenfunktion $\tilde{u}: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$(\forall B^1, B^2 \in \mathcal{B})[B^1 \underline{\gg} B^2 \Leftrightarrow \tilde{u}(B^1) \geq \tilde{u}(B^2)].$$

Lemma 8.2

Sei $\mathcal{B}$ ein abzählbares Mengensystem [2] und $\underline{\gg}$ eine vollständige Ordnung auf $\mathcal{B}$. Dann gibt es eine Nutzenfunktion $\tilde{u}: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$(\forall B, B' \in \mathcal{B})[\tilde{u}(B') \geq \tilde{u}(B) \Leftrightarrow B' \underline{\gg} B].$$

Lemma 8.3

Ist $\underline{\gg}$ eine vollständige Ordnung auf $\mathcal{B}$. Dann sind die beiden Bedingungen:

(i) Es gibt eine endliche oder abzählbare und bezüglich $\underline{\gg}$ ordnungsdichte Teilmenge von $\mathcal{B}$,

(ii) Es gibt einen Isomorphismus von $\langle \mathcal{B}, \underline{\gg} \rangle$ in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$,

äquivalent.

Nehmen wir an, ein Budgetraum $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ sei wie üblich vorgegeben (vgl. Fußnote 2)). Ferner sei $\succeq$ eine Relation auf X und zwischen

---

1) Man beachte, daß $\tilde{u}$ eine Mengenfunktion ist, d.h. der Definitionsbereich von $\tilde{u}$ besteht nur aus Mengen.

2) Ohne ständig darauf hinzuweisen, setzen wir stets voraus, daß $\mathcal{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

der Relation $\succsim$ und $\succ$ bestehe folgender Zusammenhang:

$$x \succ y \;:\Leftrightarrow\; (x \succsim y) \wedge \neg(y \succsim x), \quad \forall x,y \varepsilon X.$$

Wird dann auf naheliegende Weise eine Budgetrelation auf $\mathcal{B}$ durch

$$B \succsim^{*} B' \;:\Leftrightarrow\; (\forall x \varepsilon C_{\succ}(B))(\forall x' \varepsilon B')[\neg(x' \succ x)]$$ [1]

erklärt, so stellt sich die Frage, wie sich gewisse Eigenschaften von $\succsim$ auf $\succsim^{*}$ auswirken. Hierüber wird in Theorem 8.1 eine Aussage gemacht.

Theorem 8.1 [2]

Gegeben sei ein Budgetraum $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ und eine transitive Relation $\succsim$ auf X. Ist ferner $\succsim$ auf dem Bereich $\bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$ eine schwache Ordnung, so trifft das auch auf $\succsim^{*}$ zu, wenn für alle $B \varepsilon \mathcal{B}$ die Bedingung $C_{\succ}(B) \neq \emptyset$ erfüllt ist.

Beweis:

Es genügt, die Gültigkeit der Äquivalenz

$$B \succsim^{*} B' \;\Leftrightarrow\; (\exists x \varepsilon C_{\succ}(B))(\exists x' \varepsilon C_{\succ}(B'))[x \succsim x']$$

zu überprüfen. Sei deshalb für beliebige $B, B' \varepsilon \mathcal{B}$ $B \succsim B'$ vorgegeben. Da nach Voraussetzung $C_{\succ}(B)$ und $C_{\succ}(B')$ nicht leer sind, gibt es $x \varepsilon C_{\succ}(B)$ und $x' \varepsilon C_{\succ}(B')$. Von $B \succsim^{*} B'$ können wir aber sofort auf $\neg(x' \succ x)$ schließen, so daß wir mit Hilfe der Vollständigkeit von $\succsim$ auf dem Bereich $\bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$ $x \succsim x'$ erhalten.

Setzen wir nun ungekehrt:

(1) $\quad (\exists x \varepsilon C_{\succ}(B))(\exists x' \varepsilon C_{\succ}(B')[x \succsim x']$

voraus! Ferner sei $\tilde{x}$ ein beliebiges Element aus $C_{\succ}(B)$ und $\tilde{x}' \varepsilon B'$. Nehmen wir $\tilde{x}' \succ \tilde{x}$ an, so folgt - da $x' \varepsilon C_{\succ}(B')$ - $x' \succsim \tilde{x}' \succ \tilde{x}$ und

---

[1] Die Menge $C_{\succ}(B)$ wurde in Definition 6.7 erklärt durch

$$C_{\succ}(B) = \{x \mid x \varepsilon B \wedge (\neg \exists y \varepsilon B)[y \succ x]\},$$ d.h. $C_{\succ}(B)$ besteht aus den maximalen Elementen von B bezüglich $\succ$.

[2] Theorem 8.1 geht im wesentlichen auf einen Satz von Little (1979, S. 185) zurück.

damit auch $x' \succ \tilde{x}$. Denn angenommen, letzteres wäre nicht der Fall, so würde wegen der Vollständigkeit von $\succsim$ auf dem Bereich $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$ die Beziehung $\tilde{x} \succsim x'$ zutreffen. Damit erhielten wir das Ergebnis $\tilde{x} \succsim \tilde{x}'$, was im Widerspruch zu $\tilde{x}' \succ \tilde{x}$ steht. Ähnlich folgt aus $x' \succ \tilde{x} \succsim x$ das Ergebnis $x' \succ x$, was einen Widerspruch zu (1) darstellt. Infolgedessen können wir unmittelbar auf die Behauptung schließen.

An das Theorem 8.1 schließt sich unmittelbar folgendes Ergebnis an:

Korollar 8.1

Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von kompakten Budgetmengen $B \subseteq X$ und $\succsim$ eine Relation auf X. Ist ferner $\succsim$ transitiv und auf $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$ durch eine von oben halbstetige Nutzenfunktion repräsentierbar, so ist die Relation $\succsim^*$ durch eine indirekte Nutzenfunktion repräsentierbar.

Beweis:

Gemäß Definition 8.1 haben wir zu untersuchen, ob eine reelwertige Funktion v existiert derart, daß

$$(\forall B, B' \in \mathcal{B})[B \succsim^* B' \Leftrightarrow v(B) \geqq v(B')]$$

wahr ist. Da $\succsim$ auf $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$ von einer von oben halbstetigen Nutzenfunktion u repräsentiert wird, gilt für alle $x, y \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} C_{\succ}(B)$

$$u(x) \geqq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y \ .$$

Da u von oben halbstetig und jedes $B \in \mathcal{B}$ kompakt ist, folgt hieraus:

$$(\forall B \in \mathcal{B})[C_{\succ}(B) \neq \emptyset] \ .$$

Infolge ihrer Repräsentierbarkeit ist die Relation $\succsim$ auch vollständig und transitiv, so daß alle Voraussetzungen von Theorem 8.1 erfüllt sind und wir aufgrund des Beweises zu diesem Satz darauf schließen können, daß für alle $B, B' \in \mathcal{B}$

(1) $B \succcurlyeq\!\succ B' \Leftrightarrow (\exists x \in C_{\succ}(B))(\exists x' \in C_{\succ}(B'))[x \succeq x']$

erfüllt ist. Damit gilt aber auch

(2) $B \succcurlyeq\!\succ B' \Leftrightarrow (\exists x \in C_{\succ}(B))(\exists x' \in C_{\succ}(B'))[u(x) \geqq u(x')]$

$\Leftrightarrow \max \{u(y) | y \in B\} \geqq \max \{u(y') | y' \in B'\}$.

Letzteres folgt, weil die Relation $\succeq$ durch eine von oben halbstetige Funktion repräsentierbar ist.
Setzen wir nun $v(B) = \max \{u(y) | y \in B\}$, so sehen wir aufgrund des Ergebnisses in (2) unmittelbar, daß wir damit eine Repräsentation von $\succcurlyeq\!\succ$ gefunden haben.

q.e.d.

Es ist naheliegend, den Relationen "revealed vorgezogen" und "indirekt revealed vorgezogen" entsprechende Relationen für Budgetmengen zu erklären.

Definition 8.2

Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{B}$ wie üblich erklärt. Ferner sei eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ gegeben. Dann gelte für beliebige Budgetmengen $B^a, B^b \in \mathcal{B}$:

$$B^a F B^b :\Leftrightarrow B^a \neq B^b \wedge h(B^b) \cap B^a \neq \emptyset.$$

Die Relation F drückt aus, daß von zwei Budgetmengen B^a und B^b erstere der zweiten vorgezogen wird, wenn sich der Handlungsträger aus B^b eine Alternative wählen kann, die er sich zumindest auch in der Budgetsituation B^a leisten kann. Diese Interpretation der Relation F läßt darauf schließen, daß er die aus B^a gewählten Alternativen mindestens ebenso hoch bewertet wie diejenigen von B^b.

Definition 8.3

Seien $B^a, B^b \in \mathcal{B}$. Dann gelte

$$B^a F^* B^b :\Leftrightarrow B^a F B^b \vee (\exists B^1, \ldots, B^k)[B^a F B^1 \wedge \ldots \wedge B^k F B^b].$$

Mit diesen Definitionen werden ein Schwaches Axiom (WF') und ein Starkes Axiom (SF') für Budgetmengen formuliert [1].

Axiom (WF')

$(\forall B^a, B^b \varepsilon \mathcal{B})[B^a F B^b \Rightarrow \neg(B^b F B^a)]$.

Axiom (SF')

$(\forall B^a, B^b \varepsilon \mathcal{B})[B^a F^* B^b \Rightarrow \neg(B^b F^* B^a)]$.

Anmerkung 8.1

Fordern wir die Gültigkeit des Axioms (WF'), so folgt unmittelbar, daß jedes Element $x \varepsilon X$ in höchstens einer Budgetsituation gewählt werden kann. Entsprechend läßt die Voraussetzung des Axioms (WA') darauf schließen, daß in jeder Budgetsituation höchstens eine Alternative ausgesucht werden kann. Da aber $h(B) \neq \emptyset$ vorausgesetzt wird, impliziert das Postulat (WA') offensichtlich, daß aus der Menge B genau ein Element gewählt wird.

Aus den oben genannten Definitionen 8.2 und 8.3 wird sofort der enge Zusammenhang zwischen den Relationen $\tilde{P}$ und F, bzw. zwischen P^* und F^*, sichtbar.

Lemma 8.4

Seien x und y Elemente aus $D(h) = \bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} h(B)$. Dann gilt:

a) $x\tilde{P}y \Rightarrow (\exists B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon h(B^1) \wedge y \varepsilon h(B^2) \wedge B^1 F B^2]$,

b) $xP^*y \Rightarrow (\exists B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon h(B^1) \wedge y \varepsilon h(B^2) \wedge B^1 F^* B^2]$.

Das nächste Lemma weist auf die enge Beziehung zwischen dem Schwachen Axiom (WA): $x\tilde{P}y \Rightarrow \neg(yVx)$ und dem Postulat (WF') hin.

---

[1] Wir verallgemeinern hiermit das Schwache und das Starke Axiom, das in ähnlicher Weise für kompetitive Budgetmengen von Sakai (1978, S.116) formuliert wurde, auf beliebige Budgetmengen.

Lemma 8.5

Erfüllt die AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$ die Bedingung (WF'), so genügt sie auch dem Axiom (WA) auf dem Bereich $D(h) = \bigcup_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)$.

Beweis:
Für beliebige $x,y\varepsilon D(h)$ gelte $x\tilde{P}y$. Infolgedessen existiert ein B^1 mit $x\varepsilon h(B^1) \wedge y\varepsilon B^1\setminus h(B^1)$. Da $y\varepsilon D(h)$ gibt es ein $B^2\varepsilon\mathcal{B}$ mit $y\varepsilon h(B^2)$, so daß also B^1FB^2 zutrifft. Bei Verwendung des Axioms (WF') folgt hieraus $\neg(B^2FB^1)$ bzw.

(1) $\quad B^2\cap h(B^1) = \emptyset$.

Von der Annahme yVx kann man auf die Existenz eines B^3 mit

(2) $\quad y\varepsilon h(B^3) \wedge x\varepsilon B^3$

geschlossen werden. Es gilt dann, drei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $B^3\neq B^1$ und $B^3\neq B^2$. Da $x\varepsilon h(B^1)$ und $x\varepsilon B^3$, erhalten wir B^3FB^1. Aus $y\varepsilon h(B^3)$ und $y\varepsilon B^1$ ergibt sich dann B^1FB^3, was im Widerspruch zu dem vorhergehenden Ergebnis steht.
2. Fall: Gilt $B^3=B^1$, so folgt aus (2) $y\varepsilon h(B^1)$, im Widerspruch zu $y\varepsilon B^1\setminus h(B^1)$.
3. Fall: Trifft $B^3=B^2$ zu, so führt (2) auf $x\varepsilon B^2$. Da aber $x\varepsilon h(B^1)$, folgt hiermit $B^2\cap h(B^1)\neq\emptyset$, im Widerspruch zu (1).

q.e.d.

Im nächsten Lemma sehen wir, daß eine Auswahlkorrespondenz, die das Axiom (SF') erfüllt, auch der Bedingung (SA) genügt.

Lemma 8.6

Erfüllt eine AWK $h:\mathcal{B}\to 2^X$ die Bedingungen (SF'), so genügt sie auch dem Axiom (SA) auf $D(h) = \bigcup_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)$.

Beweis:
Sei xP^*y und $x,y\varepsilon D(h)$. Mit Hilfe von Lemma 8.4 gelangen wir zu:

(1) $\quad (\exists B^1,B^2\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon h(B^1) \wedge y\varepsilon h(B^2) \wedge B^1F^*B^2]$.

Aus der Annahme, yVx würde zutreffen, folgt die Existenz einer Budgetmenge $\tilde{B}$ mit der Eigenschaft $y\varepsilon h(\tilde{B}) \wedge x\varepsilon\tilde{B}$. Die Anmerkung 8.1 führt auf $\tilde{B}=B^2$ und damit zu $x\varepsilon B^2$. Aus (1) folgt mit Hilfe von (SF') die Bedingung $\neg(B^2F^*B^1)$, so daß also $B^1 \neq B^2$. Aus diesem Grund und wegen

$$x\varepsilon h(B^1) \wedge x\varepsilon B^2$$

folgt B^2FB^1, was einen Widerspruch zu (1) darstellt.

q.e.d.

Wir wollen nun die Frage, welchen Einfluß die Struktur von h auf den Zusammenhang zwischen den Axiomen (WF') und (SF') hat, behandeln. Da offensichtlich (SF') $\Rightarrow$ (WF') allgemein zutrifft, haben wir nur die Umkehrung zu untersuchen. Es läßt sich z.B. unter geringem Aufwand zeigen, daß unter der Bedingung

(B) $\quad B^1,B^2\varepsilon\mathcal{B} \Rightarrow B^1\cup B^2\varepsilon\,\mathcal{B}$

die Äquivalenz der beiden genannten Axiome folgt.

Lemma 8.7

Erfüllt $h:\mathcal{B}\rightarrow 2^X$ die Bedingung (B), so gilt:

$$(WF') \Leftrightarrow (SF').$$

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort, nachdem wir gezeigt haben, daß F transitiv ist. Es gelte deshalb für beliebige Budgetmengen $B^1,B^2,B^3\varepsilon\mathcal{B}$:

(1) $\quad B^1FB^2 \wedge B^2FB^3$.

Also gibt es definitionsgemäß ein $y\varepsilon X$ mit $y\varepsilon h(B^2) \wedge y\varepsilon B^1$. Wenden wir die Bedingung (WF') an, so folgt leicht, daß $y\notin h(B^1)$. Da $h(B^1)\neq\emptyset$, gibt es ein $x\varepsilon h(B^1)$, und wir erhalten mit der Definition von $\tilde{P}$ $x\tilde{P}y$. Ähnlich folgt die Existenz von zwei Elementen $\tilde{y}$ und z mit:

$$\tilde{y}\varepsilon h(B^2) \wedge z\varepsilon h(B^3) \wedge z\varepsilon B^2\setminus h(B^2),$$

so daß $\tilde{y}\tilde{P}z$ gilt. Erinnern wir uns an die Vorbemerkung zu Theorem 4.3, so impliziert die Bedingung (B) zusammen mit (WA) die Transitivität von $\tilde{P}$, so daß wir $x\tilde{P}z$ erhalten. Da jedes der Elemente x und z nur in einer einzigen Budgetsituation ausgewählt werden kann, muß $B^1 F B^3$ zutreffen, womit die Behauptung unmittelbar folgt.

Nicht nur das Starke und das Schwache Axiom, sondern auch das Kongruenzaxiom (CA) kann für Budgetmengen formuliert werden. Aus diesem Grunde führen wir für Budgetmengen die Relationen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{W}$, die den Relationen V und W entsprechen, ein.

Definition 8.4

Für $B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B}$ gelte

$$B^1 \mathbf{V} B^2 \;:\Leftrightarrow\; h(B^2) \cap B^1 \neq \emptyset.$$

$\mathbf{W}$ bezeichne die transitive Hülle von $\mathbf{V}$.

In Übereinstimmung mit Little ((1979), S.150) nennen wir eine Auswahlkorrespondenz "indirekt kongruent", wenn sie das Postulat

$$\text{(CF):} \qquad (\forall x \varepsilon X)(\forall B', B \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon B \cap h(B') \wedge B' \mathbf{W} B \Rightarrow x \varepsilon h(B)]$$

erfüllt. Das nachfolgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den Axiomen (WF') und (CF) her.

Lemma 8.8

Unter der Bedingung (B) gilt (WF') $\Rightarrow$ (CF).

Beweis:

Es soll zunächst die Transitivität von $\mathbf{V}$ nachgewiesen werden. Deshalb nehmen wir

$$B^1 \mathbf{V} B^2 \wedge B^2 \mathbf{V} B^3$$

an und unterscheiden vier Fälle.

1.Fall: $B^1 \neq B^2$, $B^2 \neq B^3$, $B^1 \neq B^3$. Hieraus ergibt sich $B^1 F B^2 \wedge B^2 F B^3$, woraus sich analog zu dem Beweis von Lemma 8.7

$B^1 F B^3$ ergibt. Damit gilt aber auch $B^1 \mathbf{V} B^3$.
In den Fällen, wo $B^1=B^2$, $B^2=B^3$ oder $B^1=B^3$ erfüllt ist, folgt der Schluß auf $B^1 \mathbf{V} B^3$ unmittelbar.
Um die Gültigkeit von (CF) zu überprüfen, setzen wir für beliebige Budgetmengen B und B'

$$x \varepsilon X \wedge x \varepsilon B \cap h(B') \wedge B' \mathbf{W} B$$

voraus, so daß damit $B \mathbf{V} B'$ und $B' \mathbf{V} B$ erfüllt ist.
Aus der Annahme $x \notin h(B)$ folgt $BF\,B'$. Damit gilt aufgrund von (WF') $\neg(B'F\ B)$, was zu $h(B) \cap B' = \emptyset$ führt. Das ist aber ein Widerspruch zu $B' \mathbf{V} B$.

Anmerkung 8.2

Wir wissen bereits, daß unter der Bedingung (B) die Postulate (WA) und (CA) äquivalent sind (vgl. Theorem 4.3, S.21). Es kann jedoch die Äquivalenz von (WF') und (CW) unter dieser Bedingung nicht nachgewiesen werden. Eine solche besteht aber, wenn zusätzlich gefordert wird, daß die Menge $\{B \varepsilon \mathcal{B} | x \varepsilon h(B)\}$ für jedes $x \varepsilon X$ einelementig ist. Der Grund ist folgender: Während das Axiom (WF') stets die Einelementigkeit von $h(B)$ für jedes $B \varepsilon \mathcal{B}$ impliziert, ist dies bei Voraussetzung von (CF) nicht notwendig der Fall.

Anmerkung 8.3

Wenn wir die Bedingung (A) von §4 berücksichtigen und voraussetzen, daß alle endlichen Mengen außer der leeren Menge in $\mathcal{B}$ enthalten sind, so wird evident, daß diese Bedingung zusammen mit dem Axiom (WF') sinnlos ist. Wie nämlich bereits in der Bemerkung 8.1 festgestellt wurde, impliziert das Axiom (WF'), daß jedes $x \varepsilon X$ in höchstens einer Budgetsituation gewählt werden kann, so daß also x bereits aus der Budgetmenge $\{x\} \varepsilon \mathcal{B}$ und nur aus dieser gewählt werden kann. Für jede andere Budgetmenge B mit $|B|>1$ wäre aber $h(B)=\emptyset$, was im Widerspruch zur Definition von h steht. Ebensowenig ist unter der Bedingung (A) das Axiom (CF) sinnvoll, da

$$x \varepsilon B \cap h(B') \wedge B' \mathbf{W} B \Rightarrow x \varepsilon h(B)$$

nur zutreffen kann, wenn $B=B'=\{x\}$.

8.2 Rationalisierbarkeit durch Budgetpräferenzen

Wir wollen uns nun mit dem Problem der Rationalisierbarkeit von Auwahlkorrespondenzen durch Budgetpräferenzen beschäftigen. Die uns bekannten Dualisierungsprinzipien, etwa das der linearen Optimierung, legen uns nahe, Rationalität von h bezüglich einer Budgetrelation so zu erklären, daß x nur dann Element von h(B) sein soll, wenn der Handlungsträger die Budgetmenge B nicht besser einschätzt als alle anderen Budgetsituationen, in denen ihm gleichfalls x angeboten wird. Es ist nämlich möglich, daß ihm in diesen Situationen auch Alternativen, die er höher als x einschätzt, zur Wahl stehen. Gilt $x\varepsilon h(B)$, so ist daher B von allen Mengen, in denen x enthalten ist, ein minimales Element [1].

Definition 8.5

Sei $h:\mathcal{B}\rightarrow 2^X$ eine AWK.

a) Dann heißt h "indirekt m-rational" bezüglich einer Relation $\succ\!\!\succ$ auf $\mathcal{B}$ genau dann, wenn

$$(\forall B\varepsilon\mathcal{B})[h(B)=\{x|x\varepsilon B \wedge (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B' \Rightarrow \neg(B\succ\!\!\succ B')]\}].$$

b) $h:\mathcal{B}\rightarrow 2^X$ heißt "indirekt b-rational" bezüglich einer Relation $\succeq\!\!\succeq$ auf $\mathcal{B}$ genau dann, wenn

$$(\forall B\varepsilon\mathcal{B})[h(B)=\{x|x\varepsilon B \wedge (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B' \Rightarrow B'\succeq\!\!\succeq B]\}].$$

c) $h:\mathcal{B}\rightarrow 2^X$ heißt "indirekt rational" genau dann, wenn eine Relation G' auf $\mathcal{B}$ existiert derart, daß h indirekt m-rational bezüglich G' ist.

---

[1] Ein Element $c\varepsilon A$ heißt ein "minimales Element" bezüglich einer Relation $\succ$ auf A, wenn für alle $s\varepsilon A$ die Beziehung $\neg(c\succ s)$ zutrifft. c heißt ein "schlechtestes Element" von A bezüglich $\succeq$, wenn für alle $s\varepsilon A$ die Beziehung $c\preceq s$ zutrifft.

Anmerkung 8.4

Offensichtlich ist jede indirekt b-rationale AWK auch indirekt m-rational, da jede schlechteste Budgetmenge auch eine minimale ist.

Wir haben in unserem Paragraphen 4 mehrere Versionen des Schwachen und Starken Axioms, die auch bei der Rationalisierbarkeit von $h: \mathcal{B} \to 2^X$ eine Rolle spielten, kennengelernt. Aus diesem Grunde ist es naheliegend, nach entsprechenden Versionen dieser Axiome für Budgetmengen zu suchen.
In dem folgenden Postulat erkennen wir leicht eine dem Axiom (WA) entsprechende Forderung für Budgetmengen.

Axiom (WF)

$(\forall B, B' \varepsilon \mathcal{B})[BFB' \Rightarrow \neg(B' \mathbf{V} B)]$.

Analog formulieren wir ein dem Postulat (SA) entsprechendes Axiom (SF).

Axiom (SF)

$(\forall B, B' \varepsilon \mathcal{B})[BF^*B' \Rightarrow \neg(B' \mathbf{V} B)]$.

Zwischen dem Starken Axiom (SA) und dem Postulat (SF) besteht ein enger Zusammenhang, auf den der nächste Satz hinweist.

Theorem 8.2

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ erfüllt das Axiom (SA) auf dem Bereich $D(h) = \bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} h(B)$, wenn sie die Bedingung (SF) erfüllt.

Beweis:
(SF) sei vorausgesetzt und es gelte ferner für $x,y \varepsilon \bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} h(B)$ die Beziehung xP^*y. Aufgrund von Lemma 8.4 folgt hieraus:

(1) $(\exists B^1, B^2 \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon h(B^1) \wedge y \varepsilon h(B^2) \wedge B^1 F^* B^2]$.

Angenommen, es gilt yVx, so führt dies zu

(2) $(\exists B^o \varepsilon \mathcal{B})[y \varepsilon h(B^o) \wedge x \varepsilon B^o]$.

Von (1) und (2) können wir auf

(3) $B^o \mathbf{V} B^1 \wedge B^2 \mathbf{V} B^o$

schließen.

1.Fall: $B^o \neq B^1$, $B^2 \neq B^o$.

Dann folgt aus (3) $B^2 F^* B^1$, so daß wir mit (1) $B^1 F^* B^1$ erhalten. Mit (SF) können wir dann auf $\neg(B^1 \mathbf{V} B^1)$, i.e. $h(B^1) \cap B^1 = \emptyset$, schließen, was zu einem Widerspruch zu (1) führt, da $x \varepsilon h(B^1)$.

2.Fall: $B^o = B^1$.

Mit (1) können wir auf $B^o F^* B^2$ schließen, so daß sich mit (SF) $\neg(B^2 \mathbf{V} B^o)$ bzw. $h(B^o) \cap B^2 = \emptyset$ ergibt. Das aber ist ein Widerspruch zu (1) und (2).

3.Fall: $B^2 = B^o$.

Mit (1) ergibt sich dann $B^1 F^* B^o$, so daß wir aufgrund von (SF) $\neg(B^o \mathbf{V} B^1)$ und damit $h(B^1) \cap B^o = \emptyset$ gilt, womit wir einen Widerspruch zu (1) und (2) erhalten.

q.e.d.

Einige der uns aus §6 bekannten Theoreme lassen sich nun leicht auf Budgetpräferenzen übertragen.

Theorem 8.3

Erfüllt $h: \mathcal{B} \rightarrow 2^X$ das Axiom (WF), so gibt es eine vollständige Budgetrelation $\mathbf{V}^o$ auf $\mathcal{B}$ derart, daß für alle $B^o \varepsilon \mathcal{B}$:

$$h(B^o) = \{x \varepsilon \bigcup_{B \varepsilon \mathcal{B}} h(B) \mid x \varepsilon B^o \wedge (\forall B' \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon B' \Rightarrow B' \mathbf{V}^o B^o]\}.$$

Beweis:

Wir definieren eine Relation V^o durch

$$B \mathbf{V}^o B' :\Leftrightarrow B \mathbf{V} B' \vee \neg(B' \mathbf{V} B), \quad \forall B, B' \varepsilon \mathcal{B}.$$

Offensichtlich ist diese Relation vollständig. Es soll nun nachgewiesen werden, daß h bezüglich $\mathbf{V}^o$ indirekt b-rational ist.

Sei deshalb $\bar{B}\varepsilon\mathcal{B}$, $\bar{x}\varepsilon h(\bar{B})$, $B'\varepsilon\mathcal{B}$ und $x'\varepsilon B'$ vorausgesetzt. Hieraus folgt $h(\bar{B})\cap B'\neq\emptyset$, so daß $B'\,\mathbf{V}^{0}\,\bar{B}$ zutrifft. Umgekehrt gelte

(1) $\quad \bar{x}\ \varepsilon\ \{x\,|\,x\varepsilon\bar{B}\ \wedge\ (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B'\ \Rightarrow\ B'\,\mathbf{V}^{0}\,\bar{B}]\}$

und $\bar{x}\varepsilon\bigcup\limits_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)$. Nehmen wir $\bar{x}\notin h(\bar{B})$ an, so gibt es ein $z^{0}\neq\bar{x}$ und $z^{0}\varepsilon h(\bar{B})$. Da $\bar{x}\varepsilon\bigcup\limits_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)$, existiert eine Budgetmenge $\tilde{B}$ mit $\bar{x}\varepsilon h(\tilde{B})$. Infolgedessen erhalten wir als Ergebnis $\bar{B}F\tilde{B}$ und mit Hilfe des Postulates (WF) $\neg(\tilde{B}\,\mathbf{V}\,\bar{B})$. Von $\bar{x}\varepsilon h(\tilde{B})$ und $\bar{x}\varepsilon\bar{B}$ können wir auf $\bar{B}\,\mathbf{V}\,\tilde{B}$ schließen, so daß wir das Resultat

$$\bar{B}\,\mathbf{V}\,\tilde{B}\ \wedge\ \neg(\tilde{B}\,\mathbf{V}\,\bar{B})$$

erhalten. Diese Aussage ist jedoch äquivalent zu

$$\neg((\tilde{B}\,\mathbf{V}\,\bar{B})\ \vee\ \neg(\bar{B}\,\mathbf{V}\,\tilde{B})).$$

Damit erhalten wir als Ergebnis $\neg(\tilde{B}\,\mathbf{V}^{0}\bar{B})$, was im Widerspruch zu (1) steht.

q.e.d.

Theorem 8.4

Erfüllt $h:\mathcal{B}\to 2^{X}$ das Axiom (SF), so gilt für jede beliebige Budgetmenge $B^{0}\varepsilon\,\mathcal{B}$

$$h(B^{0})\ =\ \{x\varepsilon\bigcup_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)\,|\,x\varepsilon B^{0}\ \wedge\ (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B'\Rightarrow\neg(B^{0}F^{*}B')]\}.$$

Beweis:

Sei $\bar{B}\varepsilon\mathcal{B}$ und $\bar{x}\varepsilon h(\bar{B})$. Wir betrachten ferner ein $B''\varepsilon\mathcal{B}$ mit $\bar{x}\varepsilon B''$. Von $B''\,\mathbf{V}\,\bar{B}$ führt das Axiom (SF) auf $\neg(\bar{B}F^{*}B'')$. Mit diesem Ergebnis gewinnen wir schließlich :

(1) $\quad \bar{x}\ \varepsilon\ \{x\varepsilon\bigcup\limits_{B\varepsilon\mathcal{B}} h(B)\,|\,x\varepsilon\bar{B}\ \wedge\ (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B'\ \Rightarrow\ \neg(\bar{B}F^{*}B')]\}.$

Setzen wir umgekehrt (1) voraus und nehmen $\bar{x}\notin h(\bar{B})$ an, so können wir auf die Existenz einer Budgetmenge $\tilde{B}$ mit der Eigenschaft $\bar{x}\varepsilon h(\tilde{B})$ schließen. Damit aber gilt $\bar{B}F\tilde{B}$, so daß wir einen Widerspruch zu (1) erhalten.

q.e.d.

Es ist naheliegend, ein zu dem Theorem 6.4 duales zu suchen. Aus diesem Grunde müssen wir zunächst das Axiom (VA) für Budgetmengen formulieren. Zu diesem Zwecke definieren wir die Mengen $A(x)$ und $A^*(x)$ für $x \varepsilon X$ durch

$$A(x) := \{B \mid B \varepsilon \mathcal{B} \wedge x \varepsilon \mathcal{B}\},$$

$$A^*(x) := \{B \mid B \varepsilon A(x) \wedge x \varepsilon h(B)\}.$$

Wir können dann für Budgetmengen ein Postulat, welches dem Axiom (VA) entspricht, auf folgende Weise formulieren:

Axiom (VF)

$$(\forall x \varepsilon X)[B \varepsilon A(x) \wedge (\forall B' \varepsilon A(x))[B' \mathbf{V} B \Rightarrow B \varepsilon A^*(x)]].$$

Mit dieser Erklärung lautet dann der zu Theorem 6.4 duale Satz:

Theorem 8.5

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist genau dann indirekt b-rational, wenn h das Axiom (VF) erfüllt.

Beweis:

1. Teil: Setzen wir zunächst voraus, h sei indirekt b-rational, d.h. per definitionem, es gibt eine Relation $\succsim$ auf $\mathcal{B}$ derart, daß h indirekt b-rational bezüglich $\succsim$ ist. Hieraus folgt

$$h(B) = \{x \mid x \varepsilon B \wedge (\forall B' \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon B' \Rightarrow B' \succsim B]\}, \forall B \varepsilon \mathcal{B}.$$

bzw.

(1) $$h(B) = \{x \mid B \varepsilon A(x) \wedge (\forall B' \varepsilon \mathcal{B})[B' \varepsilon A(x) \Rightarrow B' \succsim B]\}, \forall B \varepsilon \mathcal{B}.$$

Sei $x \varepsilon X$ und $\bar{B} \varepsilon A(x)$ gegeben. Ferner gelte für ein beliebiges $B'' \varepsilon A(x)$

(2) $$B'' \mathbf{V} \bar{B},$$

so daß definitionsgemäß ein z in X existiert, für welches $z \varepsilon h(\bar{B}) \wedge z \varepsilon B''$ erfüllt ist. Mit (1) können wir hiervon auf $B'' \succsim \bar{B}$ schließen. Infolgedessen gilt für alle $B' \varepsilon A(x)$ mit $B' \mathbf{V} \bar{B}$ die Beziehung $B' \succsim \bar{B}$. Dieses Ergebnis führt zusammen mit (1) auf $x \varepsilon h(\bar{B})$.

2. Teil: Um die Umkehrung zu überprüfen, erfülle h das Axiom (VF). Wir werden zeigen, daß h indirekt b-rational bezüglich $\mathbf{V}$ ist. Sei $B \varepsilon \mathcal{B}$ und $\bar{x} \varepsilon h(B)$ vorausgesetzt. Dann gilt für ein beliebiges $B' \varepsilon A(x)$ aufgrund der Definition der Relation $\mathbf{V}$ $B' \mathbf{V} B$, so daß

$$h(B) \subseteq C := \{x \mid B \varepsilon A(x) \wedge (\forall B' \varepsilon \mathcal{B})[B' \varepsilon A(x) \Rightarrow B' \mathbf{V} B]$$

gilt.

Setzen wir nun $\bar{x} \varepsilon C$ voraus, so folgt $B \varepsilon A(\bar{x})$. Ferner soll für alle $B' \varepsilon A(\bar{x})$ die Beziehung $B' \mathbf{V} B$ erfüllt sein. Infolgedessen kann mit (VF) auf $B \varepsilon A^*(x)$ geschlossen werden, womit der Satz bewiesen ist.

Um einen Satz, der dem Theorem 6.10 entspricht, formulieren zu können (vgl. Little 1979, S.191), führen wir zunächst einen neuen Begriff ein.

Definition 8.6

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ heißt genau dann "indirekt regulär-rational", wenn h bezüglich einer vollständigen und transitiven Relation indirekt rational ist.

Damit lautet das zu Theorem 6.10 duale [1)]

Theorem 8.6

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist genau dann indirekt regulär-rational, wenn für alle $x \varepsilon X$ $A^*(x) \neq \emptyset$ und wenn $\bar{h}$ das Axiom (CF) erfüllt.

Beweis:

1. Teil: Sei h indirekt regulär-rational bezüglich einer Relation $\mathbf{G}$. Ferner sei $\bar{x} \varepsilon \bar{B} \cap h(B') \wedge B' \mathbf{W} \bar{B}$ vorgegeben. Nehmen wir

---

1) Wir gebrauchen den Begriff "dual", um damit auszudrücken, daß die Relationen über X gegen entsprechende über $\mathcal{B}$ ausgetauscht werden, und daß ferner die Axiome (WA), (SA) usw. durch die entsprechenden für Budgetmengen ersetzt werden.

$\bar{x} \notin h(\bar{B})$ an, so können wir auf

(1) $\quad \bar{B}\,\mathbf{G}\,B' \wedge \neg(B'\,\mathbf{G}\,\bar{B})$

schließen. Die Beziehung $B'\,\mathbf{W}\,\bar{B}$ impliziert

$$(\exists B^1,\ldots,B^k)\,[B'\,\mathbf{V}\,B^1 \wedge\ldots\wedge B^k\,\mathbf{V}\,\bar{B}],$$

womit sich $B'\,\mathbf{G}\,B^1 \wedge\ldots\wedge B^k\,\mathbf{G}\,\bar{B}$ ergibt. Da $\mathbf{G}$ transitiv ist, erhalten wir schließlich $B'\,\mathbf{G}\,\bar{B}$, im Widerspruch zu dem Ergebnis in (1).

2. Teil: h erfülle das Kongruenzaxiom. Definieren wir die Relationen $\mathbf{P}^o$ und $\mathbf{J}^o$ durch

$$B\,\mathbf{P}^o\,B' \;:\Leftrightarrow\; B\,\mathbf{W}\,B' \wedge \neg(B'\,\mathbf{W}\,B)$$

$$B\,\mathbf{J}^o\,B' \;:\Leftrightarrow\; B=B' \vee (B'\,\mathbf{W}\,B \wedge B\,\mathbf{W}\,B'),$$

so können wir analog dem Beweis zu Theorem 6.10 fortfahren (vgl. auch Little (1979, S.191)). Demnach gibt es eine vollständige und transitive Erweiterung $\mathbf{P}'$ von $\mathbf{P}^o/\mathbf{J}^o$ auf $\mathcal{B}/\mathbf{J}^o$. Definieren wir die Relation $\mathbf{R}^o$ durch

$$B\,\mathbf{R}^o\,B' \;:\Leftrightarrow\; B\,\mathbf{J}^o\,B' \vee [B]\;\mathbf{P}'\;[B'],$$ [1)]

so folgt in entsprechender Weise wie im Beweis zu Theorem 6.10, daß h indirekt regulär-rational bezüglich $\mathbf{R}^o$ ist.

q.e.d.

Mit Hilfe des im folgenden Lemma ermittelten Zusammenhangs zwischen den Axiomen (CA) und (CF), wird im Korollar 8.2 eine Beziehung zwischen indirekt regulär-rational und regulär-rational hergestellt.

Lemma 8.9

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ erfüllt genau dann das Postulat (CA) auf $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} h(B)$, wenn sie dem Axiom (CF) genügt.

Der Beweis für diese Behauptung kann bei Little (1979, S.192) nachgelesen werden.

---

1) [B] bezeichne die Äquivalenzklasse von B in $\mathcal{B}$ bezüglich der Relation $\mathbf{J}^o$.

Korollar 8.2

Eine AWK $h: \mathcal{B} \to 2^X$ ist genau dann indirekt regulär-rational, wenn h regulär-rational ist.

Der Beweis hierzu folgt direkt aus den Theoremen 6.10, 8.6 und dem Lemma 8.9.

8.3 Bewertung der Budgetmengen durch reelwertige Funktionen

Wir wollen uns nun mit dem Problem der Repräsentierbarkeit von Auswahlkorrespondenzen durch reelwertige Funktionen, wenn die Budgetpräferenzen gewissen Restriktionen unterworfen sind, beschäftigen.
Erinnern wir uns an die Erklärung der Repräsentierbarkeit von Auswahlkorrespondenzen in Definition 7.2! Dort hatte es geheißen, daß h durch eine numerische Funktion $g: X \to \mathbb{R}$ repräsentierbar ist, wenn

$$(\forall B \varepsilon \mathcal{B})[h(B) = \{x \mid x \varepsilon B \wedge (\forall y \varepsilon B)[g(x) \geqq g(y)]\}]$$

Im Gegensatz zu dieser Definition ist es nun erforderlich, daß die reelwertige Funktion nicht über X, sondern über $\mathcal{B}$ erklärt ist, da sie eine Bewertung der Budgetmengen liefern soll. Nach den uns bekannten Dualitätsprinzipien ist folgende Erklärung naheliegend:

Definition 8.7

Eine reelwertige Funktion $v: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ heißt genau dann eine "Bewertung" von $h: \mathcal{B} \to 2^X$, wenn

$$(\forall B \varepsilon \mathcal{B})[h(B) = \{x \mid x \varepsilon B \wedge (\forall B' \varepsilon \mathcal{B})[x \varepsilon B' \Rightarrow v(B') \geqq v(B)]\}].$$

Existiert eine solche Bewertung der AWK h, so heißt h auch "bewertbar".

Es stellt sich nun die Frage nach einer sinnvollen Interpretation dieser Definition. Wie wir gesehen haben, ordnet eine Re-

präsentation von h den Güterbündeln der Auswahlmenge einer Menge B den höchsten numerischen Wert zu. Liegt aber eine Bewertung von h vor, so gilt $x \varepsilon h(B)$ nur dann, wenn der Wert von B den der anderen Budgetmengen, in denen x ebenfalls auftritt, nicht übersteigt. Wird x in der Situation B^a gewählt, in der Situation B^b jedoch zurückgewiesen, so geht hieraus hervor, daß in B^b noch Alternativen zur Wahl standen, die der Handlungsträger gegenüber x präferiert. Deshalb ist es auch sinnvoll, der Budgetmenge B^b einen höheren Wert zuzuordnen als B^a. Wird x noch in einer anderen Situation B^c gewählt, so ist es angemessen, B^a und B^c mit dem gleichen Wert zu belegen. Wir sehen also, daß durch die Definition 8.7 eine sinnvolle Bewertung der Budgetmengen eingeführt wird.
In dem folgenden Satz (vgl. Sakai (1977, S. 126-127)) werden Bedingungen, unter denen eine gegebene Auswahlkorrespondenz bewertbar ist, aufgestellt. Diesem Theorem wird ein Lemma vorweggeschickt. Da es sich jeweils um Aussagen über ein System von normierten kompetitiven Budgetmengen, d.h. von Mengen der Form $\{x|px \leqq 1\}$ handelt, genügt es auch, die Budgetmengen über ihre zugehörigen Preissituationen zu bewerten. Ist v dann irgendeine Bewertung von h, so werden wir in Theorem 8.7 statt $v(B(p))$ immer nur $v(p)$ schreiben.

Lemma 8.10

$\mathcal{B}$ bestehe aus allen normierten kompetitiven Budgetmengen der Form $B(p) = \{x|\, x \varepsilon \mathbb{R}^n_+ \wedge px \leqq 1\}$ für $p \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$. Ferner sei $h: \mathcal{B} \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine AWK, die das Schwache Axiom (WF') und die normierte Budgetgleichung

$$(H'): \quad (\forall p \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[x \varepsilon h(p) \Rightarrow px=1]$$ [1)]

erfüllt. Gilt dann für irgendzwei Preissituationen p^a und p^b die Beziehung $B(p^a)F^*B(p^b)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U_\varepsilon(p^a)$ in $\mathbb{R}^n_{++}$ derart, daß für alle $p \varepsilon U_\varepsilon(p^a)$ $B(p)F^*B(p^b)$ zutrifft.

---

1) Wie auch schon zuvor in dieser Arbeit schreiben wir anstelle von $h(B(p))$ zur Abkürzung $h(p)$.

Beweis:
Wird $B^0F^*B^b$ vorausgesetzt, so gilt per definitionem: Es gibt eine Budgetmenge B^1 derart, daß

(1) $\quad (B^1=B^b \vee B^1F^*B^b) \wedge B^0FB^1$.

Hieraus folgt, es gibt $p^0, p^1 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ mit $p^0 \neq p^1$, $x^0 \varepsilon h(p^0)$ und $h(p^1) \cap B^0 \neq \emptyset$, wobei $B^1=B(p^1)$ und $B^0=B(p^0)$. Demnach gibt es ein $x^1 \varepsilon h(p^1)$ mit

$$x^1 \cdot p^0 \leqq p^0 \cdot x^0 = 1.$$

Gilt $x^1 \cdot p^0 < 1$, so gibt es eine ε'-Umgebung von p^0, $U_{\varepsilon'}(p^0)$, derart, daß

$$(\forall p \varepsilon U_{\varepsilon'}(p^0))[x^1 p \leqq 1]$$

und $B(p)FB^1$ für alle $p \varepsilon U_{\varepsilon'}(p^0)$ erfüllt ist. Hieraus folgt die Behauptung sofort mit Zeile (1).
Betrachten wir nun den Fall, daß $x^1 \cdot p^0 = 1$. Aus (1) folgt mit Hilfe des Axioms (WF') $\neg(B^1FB^0)$, und damit $h(p^0) \cap B^1 = \emptyset$.
Hieraus ergibt sich

(2) $\quad x^0 \cdot p^1 > p^1 \cdot x^1 = 1.$

Sei nun $p^t = (1-t)p^0 + tp^1$ für $t \varepsilon]0,1[$ und $x^t \varepsilon h(p^t)$. Hieraus folgt:

$$p^t \cdot x^1 = (1-t)p^0 \cdot x^1 + tp^1 \cdot x^1 = (1-t) + t = 1 = p^t \cdot x^t.$$

Dieses Ergebnis führt auf $h(p^1) \cap B(p^t) \neq \emptyset$ bzw., da $p^t \neq p^1$, auf $B(p^t)FB(p^1)$. Mit dem Axiom (WF') können wir dann auf $h(p^t) \cap B(p^1) \neq \emptyset$ schließen, so daß $x^t \cdot p^t > 1$. Von $p^t \cdot x^t = (1-t)p^0 \cdot x^t + tp^1 \cdot x^t$ gelangen wir schließlich zu $p^0 \cdot x^t < 1 = p^0 \cdot x^0$. Deshalb gibt es ein $\varepsilon'' > 0$ derart, daß für alle $p \varepsilon U_{\varepsilon''}(p^0)$ $\; x^t \cdot p \leqq 1$ bzw. $h(p^t) \cap B(p) \neq \emptyset$. Infolgedessen gilt für alle $p \varepsilon U_{\varepsilon''}(p^0)$ $\; B(p)F^*B(p^1)$.
Dieses Ergebnis führt mit (1) auf die Behauptung.

q.e.d.

Theorem 8.7
Sei $h: \mathcal{B} \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine AWK, die die Voraussetzung von Lemma 8.10 und das Starke Axiom (SF') erfüllt. Ferner bezeichne $D(h)$ den Wertebereich von h. Dann gilt

(a) Es gibt eine Funktion $v: \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ derart, daß

$$B(p^1)F^*B(p^o) \Rightarrow v(p^1)>v(p^o)$$

(b) $v: \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$ ist eine Bewertung von h; d.h.

$$h(p) = \{x \mid x\varepsilon D(h) \wedge px\leqq 1 \wedge (\forall q\varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[qx\leqq 1]) \Rightarrow v(q)\geqq v(p)\}$$

(c) Für alle $p\varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ ist die Menge $\{q \mid q\varepsilon \mathbb{R}^n_{++} \wedge v(p)\geqq v(q)\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n_{++}$.

(d) $(\forall p^o, p^1 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[(p^o \neq p^1 \wedge v(p^1)\geqq v(p^o) \wedge p(t)=(1-t)p^o+tp^1 \wedge t\varepsilon]0,1[) \Rightarrow v(p^1)>v(p^t)]$.

(e) $p^1 \leq p^o \Rightarrow v(p^1)>v(p^o)$.

Beweis:

Zu (a) und (c): Aus den Voraussetzungen dieses Satzes folgt, daß F^* eine irreflexive und transitive Relation ist. Wir bezeichnen mit $Q^{\#}$ die Menge der Vektoren von $\mathbb{R}^n_{++}$ mit rationalen Komponenten und wollen zeigen, daß $Q^{\#}$ bezüglich F^* partial-dicht in $\mathbb{R}^n_{++}$ ist. Aus diesem Grunde seien p^o, p^1 Elemente aus $\mathbb{R}^n_{++} \setminus Q^{\#}$ mit $B(p^1)F^*B(p^o)$. Gemäß Lemma 8.10 gibt es ein $\varepsilon>0$ derart, daß für alle $p\varepsilon U_\varepsilon(p^1)$ $B(p)F^*B(p^o)$ zutrifft. Da ein $\bar{p}\varepsilon U_\varepsilon(p^1)\cap Q^{\#}$ mit $\bar{p}>p^1$ und $B(p^1)F^*B(\bar{p})F^*B(p^o)$ existiert, ist $Q^{\#}$ partial-dicht bezüglich F^* in $\mathbb{R}^n_{++}$. Infolgedessen gibt es nach einem Resultat von Richter (1971, S.49) eine reellwertige, beschränkte Funktion $f: \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$, die die Bedingung

(1) $\quad (\forall p^1, p^2 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[B(p^1)F^*B(p^2) \Rightarrow f(p^1)>f(p^2)]$

erfüllt. Da die Funktion f beschränkt ist, können wir ähnlich wie im Beweis zu Theorem 7.10 eine numerische Funktion v auf dem Bereich $\mathbb{R}^n_{++}$ erklären, die folgender Gleichung genügt:

$$v(p) = \sup\{\inf\{f(q) \mid q\varepsilon U\} \mid U\varepsilon \mathcal{U}_p\}$$

wobei $\mathcal{U}_p$ die Familie aller offenen Umgebungen von p in $\mathbb{R}^n_{++}$ bezeichnet. Da diese Funktion v von unten halbstetig ist (vgl. McShane und Botts (1952, S.75), erhalten wir unmittelbar (c).

Zu (b): Betrachten wir $p^o, p^1 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ mit $B(p^1)F^*B(p^o)$, so können wir aufgrund von Lemma 8.10 ein $p^2 \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ mit $B(p^1)F^*B(p^2)F^*(p^o)$ wählen. Bei Verwendung von Lemma 8.10 können wir auch von $B(p^1)F^*B(p^2)$ auf die Existenz eines $\varepsilon>0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $p\varepsilon U_\varepsilon(p^1)$ die Beziehung $B(p)F^*B(p^2)$ gilt, schließen. Infolgedessen gewinnen wir mit (1)

$$\inf \{f(p) | p\varepsilon U_\varepsilon(p^1)\} \geqq f(p^2) > f(p^o) \quad .$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} v(p^1) &= \sup \{\inf \{f(p) | p\varepsilon U\} | U\varepsilon \mathfrak{U}_{p^1}\} \\ &\geqq \inf \{f(p) | p\varepsilon U_\varepsilon(p^1)\} \\ &\geqq f(p^2) > f(p^o) \geqq v(q^o). \end{aligned}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$w(p) = \{x | x\varepsilon \mathbb{D}(h) \wedge px \leqq 1 \wedge (\forall q \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})[qx \leqq 1 \Rightarrow v(p) \geqq v(q)]\}$$

ein, so genügt es, die Gleichung $w(p) = h(p)$ zu überprüfen. Sei $x\varepsilon h(p)$ und es gelte für ein beliebiges $q\varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$, $q \neq p$, $qx \leqq 1$. Hieraus folgt $B(q)F^*B(p)$, so daß gemäß der bereits bewiesenen Behauptung (b) $v(q)>v(p)$ erfüllt ist. Dieses Ergebnis führt direkt auf $x\varepsilon w(p)$.

Betrachten wir nun $\bar{x}\varepsilon w(p) \setminus h(p)$. Da $\bar{x}$ aus dem Wertebereich von h ist, gibt es ein $\bar{q}\varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ derart, daß $\bar{q} \neq p$ und $\bar{x}\varepsilon h(\bar{q})$. Hieraus folgt $B(p)F^*B(\bar{q})$ und damit gemäß (b): $v(p)>v(\bar{q})$. Andererseits gilt $\bar{q}\bar{x}=1$, so daß wir infolge von $\bar{x}\varepsilon w(p)$ die Beziehung $v(\bar{q}) \geqq v(p)$ erhalten, was unserem vorhergehenden Ergebnis widerspricht. Deshalb muß $h(p)=w(p)$ gelten.

Zu (d): Wir betrachten $p^1, p^o \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ mit $v(p^1) \geqq v(p^o)$ und $p^1 \neq p^o$. Ferner sei $p^t=(1-t)p^1+tp^o$ für $t\varepsilon]0,1[$. Hieraus ergibt sich für $x^t \varepsilon h(p^t)$, daß

$$(1-t)p^1x^t + tp^ox^t = 1$$

erfüllt ist. Infolgedessen gilt: $p^1x^t \leqq 1 \vee p^ox^t \leqq 1$.

Falls $p^1x^t \leqq 1$ erfüllt ist, erhalten wir $B(p^1)F^*B(p^t)$, und infolgedessen $v(p^1)>v(p^t)$.

Falls $p^ox^t \leqq 1$ zutrifft, so erhalten wir $B(p^o)F^*B(p^t)$ und deshalb $v(p^1) \geqq v(p^o) > v(p^t)$.

Zu (e): Wir betrachten p^1, p^o mit $p^1 \leq p^o$. Offensichtlich gilt dann auch $B(p^1)F^*B(p^o)$, so daß hieraus mit Hilfe der Behauptung (b) $v(p^1) > v(p^o)$ folgt, womit der Satz bewiesen ist.

Vergleichen wir das obige Resultat mit dem Theorem 7.10, so wird offenbar, daß die beiden Sätze dual zueinander sind. Während Theorem 7.10 zeigt, daß man in der Funktion u mit der Gleichung $u(y) = \inf \{\sup \{f(x) | x \varepsilon U\} | U \varepsilon \mathcal{U}_y\}$ eine Repräsentation von $h: \mathcal{B} \to 2^X$ gefunden hat, wird in Theorem 8.1 der Nachweis erbracht, daß die duale Funktion mit der Gleichung $v(p) = \sup \{\inf \{f(q) | q \varepsilon U\} | U \varepsilon \mathcal{U}_p\}$ eine Bewertung von h ist. An diese Ergebnisse schließt sich ein Satz an, der einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Theoremen herstellt.

Theorem 8.8

Sei $h: \mathcal{B} \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$ eine AWK mit dem Wertebereich $D(h) \subseteq \mathbb{R}^n_+$. Dann ist unter den Bedingungen von Theorem 7.10 mit der einzigen Ausnahme, daß anstelle von (SA) das Axiom (SF') vorausgesetzt wird, sowohl die Behauptung von Theorem 7.10 als auch die von Theorem 8.7 erfüllt.

Beweis:

Gemäß unserem Lemma 8.6 impliziert das Postulat (SF') das Axiom (SA), so daß h allen Bedingungen von Theorem 7.10 genügt und infolgedessen die Behauptung dieses Satzes erfüllt ist. Überprüfen wir die Voraussetzungen von Theorem 8.7, so stellen wir unmittelbar fest, daß h auch diese erfüllt. Infolgedessen gilt auch die Behauptung dieses Satzes.

Der nächste Satz geht nicht schon von einer Auswahlkorrespondenz aus, sondern setzt stattdessen eine Relation $\succsim$ auf X voraus. Es kann dann die Existenz einer rationalen AWK, zu der es sowohl eine Repräsentation als auch eine Bewertung gibt, deduziert werden.

Theorem 8.9

Sei $\succsim$ eine vollständige, transitive und von oben halbstetige Relation auf dem Bereich $\mathbb{R}^n_+$. Ferner sei $\mathcal{B}^o$ eine Familie von kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n_+$ außer der leeren Menge. Dann gilt:

(a) Es gibt eine bezüglich $\succ$ rationale AWK $h: \mathcal{B}^o \to 2^X$.

(b) Es gibt eine von oben halbstetige Nutzenfunktion $u: X \to \mathbb{R}$, die h repräsentiert.

(c) Es gibt über $\mathcal{B}^o$ eine repräsentierbare Budgetrelation.

(d) Es gibt eine indirekte Nutzenfunktion $v: \mathcal{B}^o \to \mathbb{R}$, die eine Bewertung von h darstellt, falls $A^*(x) \neq \emptyset$.

Beweis:

Zu (a) und (b): Berücksichtigen wir das Theorem 5.5, so gibt es nach diesem eine bezüglich der Relation $\succsim$ rationale AWK $h: \mathcal{B}^o \to 2^X$ derart, daß $h(B^o)$ nur aus den bezüglich der Relation $\succsim$ besten Elementen besteht. Da gemäß Theorem 7.5 die Relation $\succsim$ von einer von oben halbstetigen Nutzenfunktion $u: X \to \mathbb{R}$ repräsentiert werden kann, ist aufgrund der Konstruktion von h offensichtlich, daß u auch eine Repräsentation von h darstellt. Daher gilt für alle $B \in \mathcal{B}^o$

$$h(B) = \{x \mid x \in B \wedge (\forall y \in B)[u(x) \geq u(y)]\}.$$

Zu (c): Wir definieren ähnlich wie in Theorem 8.1 eine Budgetrelation $\succsim\!\!\succsim$ durch

$$B \succsim\!\!\succsim B' :\Leftrightarrow (\forall x \in h(B))(\neg(\exists x' \in B'))[x' \succ x] \quad ^{1)},$$

bzw., da $\succsim$ vollständig ist, durch

$$B \succsim\!\!\succsim B' \Leftrightarrow (\forall x \in h(B))(\forall x' \in B')[x \succsim x'].$$

Da alle Voraussetzungen von Korollar 8.1 erfüllt sind, ist die Relation $\succsim\!\!\succsim$ repräsentierbar.

Zu (d): Wir definieren eine Funktion $v: \mathcal{B}^o \to \mathbb{R}$ durch

(1) $\quad v(B) = \max\{u(y) \mid y \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}^o,$

---

1) Die Relation $\succ$ geht wie üblich aus der Relation $\succsim$ durch die Definition: $x \succ y \Leftrightarrow (x \succsim y) \wedge \neg (y \succsim x)$ hervor.

und zeigen von dieser, daß sie eine Bewertung von $h:\mathcal{B}^o \to 2^X$ darstellt. Da jede Menge $B\varepsilon\mathcal{B}^o$ kompakt und die Funktion $u: X \to \mathbb{R}$ von oben halbstetig ist, existiert max $\{u(x)|x\varepsilon B\}$. Sei nun $B^o\varepsilon\mathcal{B}^o$ und $x\varepsilon h(B^o)$ vorgegeben, und es gelte ferner für irgendein $B'\varepsilon\mathcal{B}^o$ $x\varepsilon B'$.

1. Fall: $x\varepsilon h(B')$. Gemäß der Konstruktion von v in (1) ist klar, daß $v(B')=v(B^o)$ gelten muß.

2. Fall: $x\notin h(B')$. Hieraus folgt die Existenz eines $z\varepsilon h(B')$ derart, daß $z\succ x$. Damit gilt $u(z)>u(x)$. Erinnern wir uns, daß h(B) nur aus den bezüglich $\succsim$ besten Elementen besteht, so gilt offenbar:

$$\max\ \{u(y)|y\varepsilon B'\} > \max\ \{u(r)|r\varepsilon B^o\},$$

so daß $v(B') > v(B)$ erfüllt ist.

Um die Umkehrung zu beweisen, setzen wir

(2) $\quad \bar{x}\ \varepsilon\ \{x|x\varepsilon B \wedge (\forall B'\varepsilon\mathcal{B})[x\varepsilon B' \Rightarrow v(B')\geqq v(B)]\}$

voraus, Nehmen wir $\bar{x}\notin h(B)$ an, so gibt es ein $\tilde{y}\varepsilon h(B)$ mit $\tilde{y}\succ\bar{x}$. Infolgedessen gilt auch $u(\tilde{y})>u(\bar{x})$. Da $A^*(\bar{x})\neq\emptyset$, gibt es ein $B^o\varepsilon\mathcal{B}^o$ mit $\bar{x}\varepsilon h(B^o)$. Da $u(\tilde{y})>u(\bar{x})$, folgt hieraus mit (1), daß $v(B)>v(B^o)$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (2). Also ist $v:\mathcal{B}^o \to \mathbb{R}$ eine Bewertung von $h:\mathcal{B}^o \to 2^X$, womit unser Satz bewiesen ist.

Mit dem obigen Theorem wollen wir unsere Untersuchungen über die Zusammenhänge zwischen indirekten Präferenzen, indirekten Nutzenfunktionen und der Bewertung von Auswahlkorrespondenzen beenden. Wir haben gesehen, daß sich die Theoreme über (direkte) Präferenzen, Nutzenfunktionen und Repräsentierbarkeit von Auswahlkorrespondenzen weitgehend in duale Aussagen über ihre (indirekten) Gegenstücke überführen lassen. Weitere Ergebnisse zu diesem Themenkreis können auch noch bei Sakai (1977), Richter (1979), Little (1979), u.a. nachgelesen werden.
Damit wollen wir den allgemeinen Teil über die Theorie der rationalen Wahl beenden und wenden uns einigen Anwendungsmöglichkeiten in der Ökonomie zu.

II. Kapitel: Anwendungen der Theorie der rationalen Wahl in der Ökonomie

§ 9 Die Theorie der Revealed Preference

9.1 Historischer Überblick

Ein ganz hervorragendes Anwendungsgebiet der Theorie der rationalen Wahl in der Ökonomie ist die Nachfragetheorie, aus der sie, so wie sie hier präsentiert wird, durch Verallgemeinerung hervorgegangen ist. Insbesondere haben Überlegungen aus der Theorie der Revealed Preference, einem Nachfragemodell, zu dieser Entwicklung geführt. Samuelson, der Begründer dieser Theorie, legte ihr, ohne explizit darauf hinzuweisen, die Hypothese zugrunde, daß es sich bei einem Konsumenten um ein Individuum handelt, dessen Präferenzen durch sein Verhalten dem Beobachter bekannt werden. Dies setzt voraus, daß der Konsument in Übereinstimmung mit seiner Präferenzvorstellung handelt. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man von dem Verhalten des Marktteilnehmers nicht auf seine Präferenzen schliessen. Wir hätten es gegebenenfalls mit einem irrational handelnden Individuum zu tun. Der von Samuelson verwandte Begriff "homo oeconomicus" beinhaltet daher, daß es sich hierbei um einen, in unserem wohldefinierten Sinne,rationalen Marktteilnehmer handelt.

Samuelson hatte mit seiner 1938 der Öffentlichkeit präsentierten Theorie die Absicht verbunden, der damaligen Diskussion über die Anwendbarkeit des psychologischen und nicht meßbaren Begriffs "Nutzen" ein Ende zu bereiten und ein Nachfragemodell frei von diesem Begriff aufzubauen. In Samuelsons Begründung für die Einführung dieses Modells findet sich folgender Satz (1938, S.62): "I propose, therefore, that we start anew in direct attack upon the problem, dropping off the last vestiges of the utility analysis. This does not preclude the introduction of utility by any who may care to do so, nor will it contradict the results attained by use of related constructs. It is merely that the analysis can be carried on more directly, and from a different set of postulates".

Unter den Postulaten, die Samuelson seinem Modell zugrundelegt, ist das berühmteste das Schwache Axiom der Theorie der Revealed Preference, welches wir bereits im § 3 kennengelernt haben. In diesem wird gefordert, daß ein Marktteilnehmer, der in der Preissituation p^0 das Güterbündel x^0 gewählt und ein anderes, x^1, zurückgewiesen hat, in einer anderen Preissituation p^1, in der er x^1 erwirbt, x^0 deshalb zurückweist, weil andernfalls sein Einkommen überschritten würde.

Samuelsons Modell wurde von Houthakker (1950) weiterentwickelt. Durch Einführung des "Starken Axioms der Theorie der Revealed Preference" (vgl. § 3) konnte dieser einen Weg weisen, wie von Annahmen über die Nachfragefunktion h auf die Existenz eines Präferenzfeldes auf dem gesamten Güterraum geschlossen werden kann. Houthakkers Gedanken wurden von Uzawa (1960, 1971), Stigum (1973), Chipman (1977), Mas-Colell (1978) und Fuchs-Seliger (1980a, 1980b) präzisiert.

Hatte Samuelson versucht, den Begriff "Nutzen" aus seinem Modell zu verbannen, so findet derselbige jedoch wieder durch die später gefundenen Sätze von Debreu und Rader über die Repräsentierbarkeit von Präferenzrelationen durch numerische Funktionen Eingang in die Theorie der Revealed Preference. Jedoch erfolgt dies nun auf rein formale Weise und nicht aus einem tiefer liegenden psychologischen oder philosophischen Grund.

In der Theorie der Revealed Preference können alle einschlägigen Gesetze der Nachfragetheorie und die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion, die die Präferenzvorstellung des Marktteilnehmers repräsentiert, aus wenigen Voraussetzungen über die Nachfragefunktion deduziert werden. Um diese Behauptung zu beweisen, präsentieren wir jetzt eine modifizierte und erweiterte Version eines Axiomensystems von Uzawa (1971).

9.2 *Die Hypothesen der Theorie der Revealed Preference*

Auf der Grundlage der Denkanstöße und Ergebnisse von Samuelson und Houthakker über die Theorie der Revealed Preference entwickelte Uzawa ein Axiomensystem, auf welchem wir hier aufbauen wollen.

Definieren wir zunächst die Relationen "revealed vorgezogen" und "indirekt revealed vorgezogen" speziell für kompetitve Budgetmengen!

Definition 9.1

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}^n_{+}$, eine Nachfragefunktion und x,y seien Elemente aus dem Wertebereich von h. Dann gelte:

a) $xRy :\Leftrightarrow x \neq y \wedge (\exists(p,M))\ [x=h(p,M) \wedge py \leq px]$.

b) $xR^* y :\Leftrightarrow xRy \vee (\exists x^1,\dots,x^k)\ [xRx^1 \wedge \dots \wedge x^k Ry]$.

Unter Verwendung dieser Definitionen lassen sich nun die Hypothesen der Theorie der Revealed Preference in folgender Form präsentieren:

DI: Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n_{+}$, $x=h(p,M)$, eine stetige Nachfragefunktion.

DII: Der Wertebereich T von h sei konvex und enthalte den $\mathbb{R}^n_{++}$ als Teilmenge.

DIII: $(\forall(p,M) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++})\ [p \cdot h(p,M)=M]$

DIV: Sei $p^0, p^1 \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $p(t) = t \cdot p^0 + (1-t) \cdot p^1$ für $t \in [0,1]$.
Dann existiert ein $K \in \mathbb{R}_{++}$ derart, daß
$(\forall t \in [0,1])(\forall M',M''>0)[\|h(p(t),M')-h(p(t),M'')\| \leq K|M'-M''|]$.

DV: (Starkes Axiom): $x R^* y \Rightarrow \neg(yR^*x)$.

DVI: Für jede beliebige Folge $<(p^\nu,M^\nu)>$, $(p^\nu, M^\nu) \in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$, die die Bedingungen $\lim_{\nu\to\infty} p^\nu = p^0 \geq 0$ und $\lim_{\nu\to\infty} h(p^\nu,M^\nu) = \bar{x} > 0$ erfüllt, gilt $p^0 > 0$.

Unter DI haben wir noch, im Gegensatz zu Uzawa (1971,S.10), die

Stetigkeit von h aufgenommen, die zwar zum Beweis von Theorem 9.1 nicht herangezogen wird, wohl aber in den darauf folgenden Sätzen Verwendung findet[1]. DII unterscheidet sich von dem entsprechenden Postulat bei Uzawa dadurch, daß wir nicht nur wie dort den $\mathbb{R}^n_{++}$ als Wertebereich zulassen. Als DIV verwenden wir eine globale Lipschitzbedingung bezüglich M, die auf Stigum (1973,S.412) zurückgeht, während Uzawa eine lokale benutzt. Der Grund dafür wird in Anmerkung 9.1 ausführlich besprochen. Die Prämisse DVI tritt bei Uzawa nicht auf. Wir benötigen diese in unserem Modell, um die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion, die h generiert, nachzuweisen.

9.3 Deduktion einer Nutzenfunktion

Im folgenden greifen wir auf ein Resultat von Uzawa (1971,S.14-19) zurück und beweisen in Theorem 9.1, daß die Axiome DI-DV die Existenz einer von oben halbstetigen Nutzenfunktion, die die gegebene Nachfragefunktion generiert, implizieren. Dazu benötigen wir die nächste Definition.

Definition 9.2

Eine Nachfragefunktion $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ heißt von einer Nutzenfunktion $u:T \to \mathbb{R}$ "generiert" genau dann, wenn für alle $(p,M) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ gilt:

$$x=h(p,M) \Rightarrow (\forall y \in T \setminus \{x\})\,[py \leq M \Rightarrow u(x) > u(y)].$$

Dem zentralen Theorem 9.1. wollen wir noch einige Hilfssätze vorausschicken (vgl. Uzawa (1971,Lemma 1), Fuchs-Seliger (1978,S.166)).

---

1 Ein Versuch Uzawas, die Stetigkeit von h bezüglich p aus den Axiomen DI (ohne Stetigkeit), DII-DV zu deduzieren (vgl. Theorem 2, S.19) scheitert daran, daß er zu seinem Beweis das Resultat PVI" verwendet, für das aber kein exakter Nachweis geliefert wird.

Zu diesem Zwecke definieren wir in Übereinstimmung mit Uzawa (1971, S.12) die beiden folgenden Funktionen.

Definition 9.3

Für p^a, $p^b \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M^a \in \mathbb{R}_{++}$ sei

a) $\rho_{b,a}(M^a) := \sup \{M | h(p^a, M^a) \; R^* h(p^b, M)\}$

b) $\rho'_{b,a}(M^a) := \inf \{M | h(p^b, M) \; R^* h(p^a, M^a)\}$.

Anmerkung 9.1

Wie unmittelbar einzusehen ist, folgt aus DI-DIII und DV $\rho_{b,a}(M^a) \leq \rho'_{b,a}(M^a)$. Ferner läßt sich leicht überprüfen, daß bei Voraussetzung der Axiome DI-DIII und DV $\rho_{b,a}(M^a)$ für alle $p^a, p^b \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M^a \in \mathbb{R}_{++}$ einen endlichen Wert annimmt und monoton wachsend ist (vgl. Fuchs-Seliger (1978, S.166)). Außerdem ist unter Voraussetzung von DI-DV die Funktion $\rho_{b,a}$ stetig (vgl. Fuchs-Seliger (1978, S.171)).

Uzawa fand das grundlegende Ergebnis, daß unter Annahme der Axiome DI-DV die Gleichung $\rho_{b,a}(M^a) = \rho'_{b,a}(M^a)$ erfüllt ist. Da dieses Resultat für alle weiteren Überlegungen von großer Bedeutung ist und wir uns häufig darauf berufen müssen, soll der Beweis dafür wiederholt werden. Außerdem haben wir eine Änderung der Lipschitzbedingung, die an geeigneter Stelle begründet wird, vorgenommen.

Lemma 9.1

Aus den Axiomen DI-DV folgt für alle $p^a, p^b \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M^a > 0$:

$$\rho_{b,a}(M^a) = \rho'_{b,a}(M^a).$$

Beweis:

1. Teil: Rekursive Definition zweier Folgen.

Für $p^a \neq p^b$ und $p^t = p^a + t(p^b - p^a)$, $t \in [0,1]$ und $s \in \mathbb{N}$ werden die Folgen $\langle \bar{M}^{k,s} \rangle_{k<s}$ und $\langle M^{k,s} \rangle_{k<s}$ auf folgende Weise konstruiert:

I. Ist $k=0$, so sei $\bar{M}^{o,s} = M^{o,s} = M^a$.

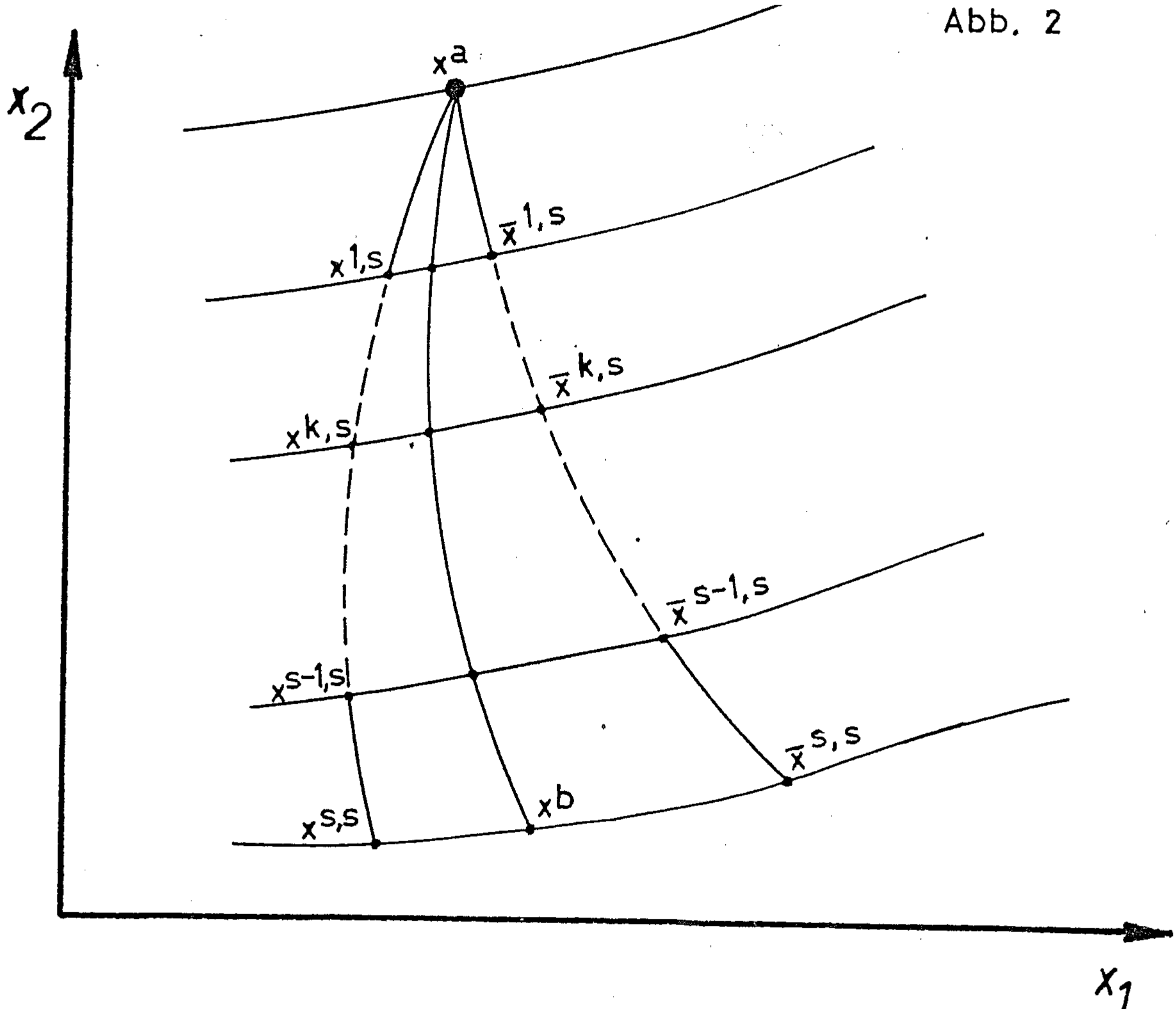
II. Nehmen wir an, $\bar{M}^{k,s}$ und $M^{k,s}$ wären bereits für $k<s$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert, so sollen für $\bar{M}^{k+1,s}$ und $M^{k+1,s}$ folgende Beziehungen erfüllt sein:

(a) $\bar{M}^{k+1,s} = p^{\frac{k+1}{s}} \bar{x}^{k,s}$ mit $\bar{x}^{k,s} = h(p^{\frac{k}{s}}, \bar{M}^{k,s})$

(b) $M^{k,s} = p^{\frac{k}{s}} x^{k+1,s}$ mit $x^{k+1,s} = h(p^{\frac{k+1}{s}}, M^{k+1,s})$.

Für den letzten Schritt bedarf es noch einer Erklärung. Nehmen wir an, $M^{k,s}$ wäre bereits festgelegt! Wir wollen nun in der Menge $\{x | x=h(p^{\frac{k+1}{s}}, M)$, für alle $M>0\}$ ein x, welches die Gleichung $M^{k,s} = p^{\frac{k}{s}} x$ erfüllt, finden. Aber da h bezüglich M stetig ist, existiert mindestens ein $\hat{x}=h(p^{\frac{k+1}{s}}, \hat{M})$, das diese Gleichung erfüllt. Wir wählen ein solches aus und können dann eine Umbenennung durchführen, indem wir $x^{k+1} = \hat{x}$ und $M^{k+1} = \hat{M}$ setzen. Die folgende Figur illustriert die Konstruktion dieser Folgen.

Abb. 2



2. Teil: Es soll nun nachgewiesen werden, daß $\lim\limits_{s\to\infty} (\bar{M}^{s,s}-M^{s,s})=0$.

Da für die Folgen $<M^{k,s}>$ bzw. $<\bar{M}^{k,s}>$ die Beziehungen $\bar{x}^{s,s}R^{*}x^{a}$ oder $\bar{x}^{s,s}=x^{a}$ bzw. $x^{a}R^{*}x^{s,s}$ oder $x^{a}=x^{s,s}$ gelten, ergibt sich sofort

(1) $M^{s,s} \leqq \rho_{b,a}(M^{a}) \leqq \rho'_{b,a}(M^{a}) \leqq \bar{M}^{s,s}$.

Ferner gilt auch

(2) $\bar{M}^{k+1,s} - \bar{M}^{k,s} = p^{\frac{k+1}{s}}\,\bar{x}^{k,s} - p^{\frac{k}{s}}\,\bar{x}^{k,s} = \frac{1}{s}(p^{b}-p^{a})\,\bar{x}^{k,s}$

(3) $M^{k+1,s} - M^{k,s} = p^{\frac{k+1}{s}}\,x^{k+1,s} - p^{\frac{k}{s}}\,x^{k+1,s} = \frac{1}{s}(p^{b}-p^{a})\,x^{k+1,s}$.

Wir definieren nun eine Folge $<c^{k,s}>$ durch $c^{k,s}:=\bar{M}^{k,s} - M^{k,s}$ für $0 \leqq k \leqq s$.

Da nach Konstruktion die Beziehung $\bar{x}^{k,s} = x^{k,s}$ oder $\bar{x}^{k,s}R^{*}x^{k,s}$ gilt, kann mit der Starken Axiom auf $c^{k,s} \geqq 0$ geschlossen werden.

Durch Substraktion der Zeilen (2) und (3) ergibt sich für $0 \leqq k \leqq s-1$:

$$c^{k+1,s} - c^{k,s} = \frac{1}{s}(p^{b}-p^{a})(\bar{x}^{k,s} - x^{k+1,s}).$$

Hieraus folgt durch Summation über beliebiges $j \leqq s$:

(4) $c^{j,s} = \sum\limits_{k=0}^{j-1} (c^{k+1,s} - c^{k,s}) = \frac{1}{s}(p^{b}-p^{a})[(\bar{x}^{0,s} - x^{1,s}) + (\bar{x}^{1,s} - x^{2,s}) + \ldots + (\bar{x}^{j-1,s} - x^{j,s})]$.

Da nach Konstruktion $x^{a} = x^{j,s}$ oder $x^{a}R^{*}x^{j,s}$ zutrifft, folgt mit dem Starken Axiom (DV)

(5) $p^{\frac{j}{s}}\,x^{a} \geqq p^{\frac{j}{s}}\,x^{j,s}$.

Definieren wir nun das Maximum von $\{p^{a},p^{b}\}$ durch

$\bar{p}:= (\max\{p_1^{a}, p_1^{b}\}, \ldots, \max\{p_n^{a}, p_n^{b}\})$

und das Minimum von $\{p^{a}, p^{b}\}$ durch

$\underline{p} = (\min\{p_1^{a}, p_1^{b}\}, \ldots, \min\{p_n^{a}, p_n^{b}\})$, so ergibt sich aus (5)

$\bar{p}x^{a} \geqq \underline{p}x^{j,s}$.

Setzen wir $\Gamma:= \{x \mid x \geqq 0 \wedge \underline{p}x \leqq \bar{p}x^{a}\}$, so gilt für alle $j \leqq s$ $x^{j,s} \in \Gamma$.

Wir verwenden nun erstmals das Axiom DIV und können gemäß dieser

Forderung auf die Existenz einer reellen Zahl K unabhängig von k und s schließen, so daß für alle k=0,1 ... s

$$(6)\quad ||\bar{x}^{k,s} - x^{k,s}|| = ||h(p^{\frac{k}{s}}, \bar{M}^{k,s}) - h(p^{\frac{k}{s}}, M^{k,s})|| \leq K|\bar{M}^{k,s} - M^{k,s}|$$

gilt. Setzen wir

$$A := \sup_{x\in\Gamma} \{(p^b - p^a)(x^a - x)\}$$

und

$$B := K||p^b - p^a||,$$

so folgt aus (4), (5) und (6):

$$(7)\quad c^{j,s} \leq \frac{1}{s}(A + B(c^{1,s} + \ldots + c^{j-1,s})).$$

Diese Beziehung führt rekursiv auf

$$(8)\quad c^{j,s} \leq \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s})^{j-1}$$

was wir nun beweisen werden:

1. Für j=1 ist (8) erfüllt. Für j=2 ebenfalls, da

$$c^{2,s} \leq \frac{1}{s}(A+B(c^{1,s})) \leq \frac{1}{s}(A+B(\frac{A}{s})) = \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s}).$$

2. Unter der Annahme, (8) sei bereits für $1 \leq k < j \leq s$ erfüllt, berechnet sich $c^{k+1,s}$ nach (7) zu

$$c^{k+1,s} \leq \frac{1}{s}[A+B(\frac{A}{s} + \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s}) + \ldots + \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s})^{k-1})]$$

$$= \frac{A}{s}[1+\frac{B}{s}(1+(1+\frac{B}{s}) + (1+\frac{B}{s})^2 + \ldots + (1+\frac{B}{s})^{k-1})].$$

Also gilt $c^{k+1,s} \leq \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s})^k$.

Für j=s geht (8) über in

$$(9)\quad c^{s,s} \leq \frac{A}{s}(1+\frac{B}{s})^{s-1}.$$

Da ferner $c^{s,s} > 0$, erhalten wir schließlich mit

$\lim\limits_{s\to\infty}(1+\frac{B}{s})^{s-1} = e^B$ das Ergebnis $\lim\limits_{s\to\infty} c^{s,s} = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{A}{s} \lim(1+\frac{B}{s})^{s-1} = 0.$

3. Teil: Wir haben bisher den Fall betrachtet, daß $p^a \neq p^b$. Gilt jedoch $p^a = p^b$, so folgt

$$(\forall M<M^a)[h(p^a,M^a)R^*h(p^a,M)]$$
$$(\forall M>M^a)[h(p^a,M)R^*h(p^a,M^a).$$

Also gilt auch in diesem Fall, daß

$$M^a = \rho_{b,a}(M^a) = \rho'_{b,a}(M^a). \qquad \text{q.e.d.}$$

Anmerkung 9.2: Untersuchen wir im obigen Beweis die Schlußweise von Zeile (6) an, so wird klar, daß genau die hier in DIV vorgeschlagene Lipschitzbedingung Verwendung findet und nicht die folgende, von Uzawa angewandte Version. Diese heißt: Eine Funktion h erfüllt die Lipschitz Bedingung bezüglich M in (p^a, M^a), wenn ein $\varepsilon>0$ und ein $K>0$ existieren derart, daß für alle $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ mit $\|p-p^a\| < \varepsilon$ und alle $M', M'' \in \mathbb{R}_+$ mit $|M'-M^a| < \varepsilon$ die Beziehung

$$\|h(p,M') - h(p,M'')\| \leq K\,|M'-M''|$$

gilt.
Aber um im vorigen Beweis auf die Zeilen (7), (8) und (9) schließen zu können, muß die Konstante K unabhängig von k und s sein. Das wird durch die hier angewandte Lipschitzbedingung gewährleistet, aber nicht durch die obige lokale Version, da die $M^{k,s}$ und $\bar{M}^{k,s}$ nicht alle in eine ε-Umgebung von M^a zu fallen brauchen. Dies scheint auch der Grund dafür zu sein, daß Chipman and Moore (1977), die Uzawas Methode auf Nachfragekorrespondenzen übertragen haben, von einem abgeschlossenen Güterraum ausgehen; denn dann können sie mit ihrem Theorem A1 auch unter Voraussetzung einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich M auf die Existenz eines solchen K unabhängig von k und s schließen. Ist also der Wertebereich von h der $\mathbb{R}^n_+$, so können wir ebenfalls anstelle von DIV Uzawas lokale Lipschitzbedingung voraussetzen und können dann mit dem Theorem A1 von Chipman und Moore weiterschließen.
Das nächste Ergebnis ist eine Folgerung aus Lemma 9.1.

Lemma 9.2

Unter Voraussetzung von DI-DV gilt:
(a) $(\forall M)[M < \rho_{b,a}(M^a) \Rightarrow h(p^a,M^a)R^*h(p^b,M)]$
(b) $(\forall M)[M > \rho_{b,a}(M^a) \Rightarrow h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a)]$

Beweis: Da die Behauptung (a) unmittelbar aus der Definition von $\rho_{b,a}(M^a)$ folgt, genügt es (b) zu untersuchen. Aus $M>\rho_{b,a}(M^a)$ folgt jedoch mit Lemma 9.1 $M>\rho'_{b,a}(M^a)$, so daß wir mit Hilfe von Definition 9.3 sofort $h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a)$ erhalten.

q.e.d.

Wir benötigen später des öfteren das Komplement der Relation R^* und kommen deshalb zur

Definition 9.4

$$x\bar{R}^*y :\Longleftrightarrow \neg(yR^*x),\ \forall x,y\in T.$$

Mit Hilfe von Lemma 9.1 bzw. 9.2 vermögen wir nun, das nächste Theorem zu beweisen. Ein ähnliches wurde bereits von Uzawa (1971,S.14-19) für Funktionen mit dem Wertebereit $\mathbb{R}^n_{++}$ präsentiert.

Theorem 9.1

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion, die die Hypothesen DI-DV erfüllt. Dann gilt:

(a) R^* ist irreflexiv,

(b) R^* ist transitiv,

(c) $\bar{R}^*$ ist streng monoton wachsend, d.h. $(\forall x,y\in T)[x\geq y \Rightarrow xR^*y]$

(d) $\bar{R}^*$ ist strikt konvex, d.h.

$$x \neq y \wedge x\bar{R}^*y \Rightarrow ((1-\lambda)x+\lambda y)R^*y,\ \forall\lambda\in]o,1[,$$

(e) $\{x\mid x\in T \wedge y^oR^*\ x\}$ ist offen in T für alle $y^o\in T$,

(f) h ist rational bezüglich $\bar{R}^*$.

(g) Es gibt eine von oben halbstetige Nutzenfunktion, die h generiert und die Relation $\bar{R}^*$ repräsentiert.

Beweis:

Da (a) und (b) offensichtlich erfüllt ist, beginnen wir gleich mit (c).

Für $x\in T$ gibt es eine Preissituation (p,M) mit $x=h(p,M)$. Gilt $x\geq y$, so folgt $px\geqq py$ und damit auch xRy.

<u>Zu (d):</u> Sei $x^a \neq x^b$, $x^a\bar{R}^*x^b$ und $x^c=(1-\gamma)x^a+\gamma x^b$ für $0<\gamma<1$.

Hieraus folgt: $p^cx^c \geqq p^cx^a \vee p^cx^c > p^cx^b$.[1]

---

[1] $(p^\cdot,M^\cdot)$ bezeichnet stets eine Preis-Einkommen-Situation, in der $x^\cdot$ gewählt wird.

1. Fall: $p^c x^c \geqq p^c x^a$.
Hieraus folgt sofort $x^c R^* x^a$.
2. Fall: $p^c x^c > p^c x^b$.
Wegen der Stetigkeit von h bezüglich M folgt hiermit:
Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß
(1) $x^c R h(p^b, M^b + \varepsilon)$.
Aufgrund von Lemma 9.2 ergibt sich

$$M^b + \varepsilon > M^b \geqq \sup\{M \mid h(p^b, M) R^* h(p^a, M^a)\},$$

so daß $h(p^b, M^b + \varepsilon) R^* h(p^a, M^a)$ gilt. Aus diesem Ergebnis gewinnen wir mit (1) schließlich $x^c R^* x^a$.

Zu (e): Gilt $x^a R^* x^b$, so läßt sich ein $x^1 \in T$ finden derart, daß
(2) $x^a = x^1 \vee x^a R^* x^1$
und
(3) $p^1 x^1 \geqq p^1 x^b \wedge x^1 \neq x^b$.

Für $x^2 := \frac{x^1}{2} + \frac{x^b}{2}$ folgt mit (3) das Ergebnis
(4) $x^1 \neq x^2 \wedge p^1 x^1 \geqq p^1 x^2$
und damit $x^1 R x^2$, so daß wir mit DV $\neg(x^2 R x^1)$ erhalten[1]. Es gilt daher
(5) $p^2 x^2 < p^2 x^1$.
Einfache Umformungen führen von (5) auf

$$p^2 x^2 > p^2 x^b.$$

Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in U_\varepsilon(x^b) \cap T$ die Beziehung $p^2 x^2 > p^2 x$ gilt. Dieses Ergebnis läßt dann zusammen mit (4) und (2) auf

$$(\exists \varepsilon > o)(\forall x \in U_\varepsilon(x^b) \cap T)[x^a R^* x]$$

schließen.
Zu (f):
Sei $x = h(p, M)$ und $z \in B(p, M)$. Hieraus folgt $x R z \vee z = x$, was sogleich mit dem Starken Axiom auf $x \bar{R}^* z$ führt.
Umgekehrt, sei $\hat{x} \in B(p, M)$ und für alle $z \in B(p, M)$ gelte $\hat{x} \bar{R}^* z$.
Angenommen, $\hat{x} \neq h(p, M)$. Da $h(p, M) \neq \emptyset$, gibt es ein $\bar{x}$ mit $\bar{x} = h(p, M)$.

---

[1] An dieser Stelle genügt auch das Schwache Axiom (WA"): $x R y \Rightarrow \neg(y R x)$. Es folgt, wie wir bereits von früher wissen, direkt aus dem Starken Axiom.

Damit gilt $\bar{x}\bar{R}^*\hat{x}$. Das aber ist ein Widerspruch zu $\hat{x}\bar{R}^* z$ bzw.zu $\neg(z\bar{R}^*\hat{x})$, da wir $z=\bar{x}$ setzen können. Damit haben wir gezeigt, daß h rational bezüglich $\bar{R}^*$ ist.

Zu(g): Die Vollständigkeit von $\bar{R}^*$ ergibt sich sofort mit DV und der Definition von $\bar{R}^*$. Ferner folgt aus (e), daß $\{x \mid x \in T \wedge x\bar{R}^* y^0\}$ für alle $y^0 \in T$ abgeschlossen in T ist.
Wir beweisen nun die Transitivität von $\bar{R}^*$. Sei deshalb $\bar{x}\bar{R}^*\bar{y} \wedge \bar{y}\bar{R}^*\bar{z}$ vorgegeben. Hieraus folgt für $\gamma \in]o,1[$ aus (d):

(6) $((1-\gamma)\ \bar{x} + \gamma\bar{y})\ \bar{R}^*\bar{y}$.

Nehmen wir $\neg(\bar{x}\bar{R}^*\bar{z})$, bzw. $\bar{z}\bar{R}^*\bar{x}$ an, so gibt es aufgrund von (e) ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $(\forall x \in U_\varepsilon(\bar{x}))[\bar{z}\bar{R}^* x]$.
Es gibt aber dann sicher auch ein $\gamma^0 \in]o,1[$, für das $\bar{z}\bar{R}^*((1-\gamma^0)\ \bar{x} + \gamma^0\bar{y})$ erfüllt ist. Dies führt aber mit (6) auf $\bar{z}\bar{R}^*\bar{y}$ und damit zu einem Widerspruch.
Da wir nun nachgewiesen haben, daß $\bar{R}^*$ vollständig, transitiv und von oben halbstetig ist, können wir einen Satz von Rader (vgl. Theorem 7.5) anwenden und erhalten als Ergebnis, daß $\bar{R}^*$ durch eine von oben halbstetige Nutzenfunktion repräsentiert werden kann. Verwenden wir dann noch (f), so folgt unsere Behauptung unmittelbar.

q.e.d.

Korollar 9.1

Erfüllt eine AWK $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ die Prämissen DI-DV, so existiert eine monotone, streng quasikonkave und von oben halbstetige Nutzenfunktion, die h generiert.

Durch das obige Korollar wird deutlich, daß die Theorie der Revealed Preference ebenfalls zu einer Nutzenfunktion führt, die ebensolche Eigenschaften, wie wir sie von anderen Modellen der Nachfragetheorie her kennen, besitzt.

Chipman und Moore (1977) haben Uzawas Hypothesen auf Nachfragekorrespondenzen übertragen und können von diesen ausgehend ebenfalls die Existenz einer von oben halbstetigen Nutzenfunktion, die die gegebene Nachfragekorrespondenz generiert, nachweisen.

Da wir aber mit dem Theorem 7.1o ein allgemeineres Ergebnis geliefert haben, kann auf den Beweis dieses Satzes von Chipman und Moore, der in Theorem 9.2 formuliert wird, verzichtet werden.

Theorem 9.2

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und $S^1 := \{(p,M) \mid (p,M) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \wedge (\exists x \in X)$ $[px \leq M]\}$. Ferner sei $h: S^1 \to 2^X$ eine Nachfragekorrespondenz, für die folgendes gilt:

a) X ist abgeschlossen und von unten beschränkt, i.e. $(\exists z \in \mathbb{R}^n)(\forall x \in X)[x \geq z]$,

b) $(\forall (p,M) \in S^1)(\forall y \in B(p,M) \setminus h(p,M))(\exists (\bar{p},\bar{M}) \in S^1)$ $[\bar{x} \in h(\bar{p},\bar{M})) \wedge$ $p\bar{x} \leq M \wedge \bar{p}y < \bar{M}]$

c) h erfüllt eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung, d.h.: Für alle $(p,M) \in S^1$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $K > 0$ derart, daß für alle (p',M'), $(p',M'') \in S^1$ gilt:
$(\| p-p' \| < \varepsilon \wedge |M-M'| < \varepsilon \wedge |M-M''| < \varepsilon \Rightarrow$
$(\forall y' \in h(p',M'))(\exists y'' \in h(p',M''))[\| y'-y'' \| \leq K|M'-M''|]$,

d) $X = \bigcup_{(p,M) \in S} h(p,M)$

e) Für alle $(p,M) \in S^1$ ist $h(p,M)$ abgeschlossen und konvex,

f) h genügt der Budgetgleichung,

g) h erfüllt das Kongruenzaxiom:
$(\forall (p,M) \in S^1)(\forall x,y \in B(p,M))$ $[x \in h(p,M) \wedge yWx \Rightarrow y \in h(p,M)]$.

Werden ferner die Relationen P^o und R^o auf X durch

$$xP^o y :\Longleftrightarrow xWy \wedge \neg(yWx)$$

und

$$xR^o y :\Longleftrightarrow \neg(yP^o x)$$

erklärt, so ist h bezüglich R^o rational. Außerdem ist R^o die einzige vollständige, transitive und von oben halbstetige Relation ist, bezüglich der h rational ist.

9.4 Existenz einer stetigen Nutzenfunktion

Um jedoch eine stetige Nutzenfunktion, die h generiert, zu gewinnen, sind noch weitere Überlegungen erforderlich. Wir beweisen deshalb zunächst ein Lemma, wozu wir zum ersten Mal die

Stetigkeit von h verwenden. Für den Beweis von Theorem 9.1 hätte auch die Stetigkeit von h bezüglich M, die aus DIV folgt, genügt.

Lemma 9.3

Vorausgesetzt seien die Axiome DI-DV, und es gelte $h(p^a,M^a)\ R^* h\ (p^b,M^b)$[1]. Hieraus folgt:

(i) $(\exists\varepsilon_1>0)[h(p^a,M^a-\varepsilon_1)R^* h(p^b,M^b)]$,

(ii) $(\exists\varepsilon_2>0)[h(p^a,M^a)R^* h(p^b,M^b+\varepsilon_2)]$.

Beweis:

Zu (i): Aufgrund der Definition von R^* gilt:

$$x^aRx^b \vee (\exists x^1,\ldots,x^n)\ [x^aRx^1\wedge\ldots\wedge x^nRx^b].$$

Im Falle, daß x^aRx^b zutrifft, erhalten wir $p^ax^a > p^ax^b \vee p^ax^a = p^a \circ x^b$.

Falls $p^ax^a > p^ax^b$, so führt die Stetigkeit von h gezüglich M auf $h(p^a,M^a-\varepsilon)Rx^b$ und damit auf $h(p^a,M^a-\varepsilon)R^* x^b$. Gilt hingegen $p^ax^a=p^ax^b$, so existiert aufgrund der Stetigkeit von h ein $t^o\in]0,1[$ mit $p(t^o) = p^b+t^o(p^a-p^b)$ derart, daß $x^d=h(p(t^o), p(t^o)\cdot x^b)$ und $x^d \neq x^b$. Andernfalls, wenn für alle $t\in]o,1[$ die Beziehung $h(p(t),\ p(t)x^b) = x^b$ gelten würde, so erhielten wir aufgrund der Stetigkeit von h

$$\lim_{t\to 1} h\ (p(t),\ p(t)x^b) = h(p^a,p^ax^b) = x^b.$$

Da aber $p^ax^b = p^ax^a$ erfüllt ist, so gilt auch $x^a=h(p^a,p^ax^b)$, wodurch sich ein Widerspruch zu $x^a \neq x^b$ ergibt.

Von $x^d = h(p(t^o),\ p(t^o)x^b)$ können wir auf $p(t^o)x^d = p(t^o)x^b$ schließen, so daß

(1) x^dRx^b

gilt. Sodann erhalten wir

$$p^ax^d = p(t^o)x^d+(1-t^o)(p^a-p^b)x^d < p(t^o)x^b+(1-t^o)(p^a-p^b)x^b=p^ax^b=p^ax^a.$$

---

1) Schreiben wir $h(p^a,M^a)R^* x$, so soll hiermit darauf hingewiesen werden, daß die beiden Güterbündel x^a und x indirekt miteinander verglichen werden, indem in der Situation (p^a,M^a) begonnen wird. Aus $x^aR^* x$ folgt bekanntlich nur, daß es eine Situation $(\bar{p}^a,\bar{M}^a)$ gibt, durch die sich erweist, daß das Güterbündel x^a dem x indirekt revealed vorgezogen wird. Diese könnte sich von (p^a,M^a) unterscheiden.

Wählen wir $x^c=h(p^a,p^ax^d)$, so folgt aus der obigen Ungleichung $x^c=h(p^a,M^a-\varepsilon_1)$ mit $\varepsilon_1=p^ax^a-p^ax^d>0$.

Infolgedessen erhalten wir $x^c=x^d \vee x^cRx^d$, so daß wir mit (1) auf $x^cR^*x^b$ schließen können[1].

Betrachten wir nun den Fall, in dem $x^aR^*x^b \wedge \neg(x^aRx^b)$ gilt! Hieraus folgt per definitionem $(\exists x^1,\dots,x^k)[x^aRx^1\wedge..\wedge x^kRx^b]$. Von $p^ax^a \geq p^ax^1$ können wir jedoch wie im vorherigen Fall auf $(\exists\tilde{\varepsilon}>0)\ [h(p^a,M^a-\tilde{\varepsilon})R^*x^1]$ schließen, so daß aufgrund der Transitivität von R^* die Beziehung $h(p^a,M^a-\tilde{\varepsilon})R^*x^b$ folgt.

Zu (ii):

Gilt x^aRx^b, so können wir wie im Beweis zu (i) vorgehen: Für den Fall, daß $p^ax^a > p^ax^b$ erhalten wir sofort die Behauptung. Gilt hingegen $p^ax^a = p^ax^b$ und betrachten wir $x^c=\frac{1}{2}x^a+\frac{1}{2}x^b$, so ist $x^a \neq x^c$ und

(2) $\quad p^ax^a = p^ax^c$

Infolgedessen gilt x^aRx^c und wegen DV auch $p^cx^c < p^cx^a$.

Hiervon können wir aufgrund der Gleichung $p^cx^c = p^c\cdot\frac{x^a}{2} + p^c\cdot\frac{x^b}{2}$ auf $p^cx^c > p^cx^b$ schließen. Da h stetig bezüglich M ist, folgt aus der letzten Ungleichung, daß ein x^d mit $x^d=h(p^b,M^b+\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2>0$ und $p^cx^c > p^cx^d$ existiert. Infolgedessen erhalten wir x^cRx^d und wegen (2) auch $x^aR^*x^d$.

Gilt $x^aR^*x^b$ und $\neg(x^aRx^b)$, so fahren wir wie in (i) fort und können von $x^aRx^1\wedge..\wedge x^kRx^b$ auf ein $\delta>0$ schließen, für das $x^kR^*h(p^b,M^b+\delta)$ gilt. Mit der Transivität von R^* erhalten wir dann $x^aR^*h(p^b,M^b+\delta)$, womit in allen Fällen unsere Behauptung bewiesen ist.

Anmerkung 9.3: Untersuchen wir den obigen Beweis, so sehen wir sehr leicht, daß wir anstelle des Starken Axioms stets das Schwache benutzen konnten.

Mit Hilfe von Lamma 9.3 beweisen wir nun das folgende zentrale Ergebnis.

---

[1] Die hier verwandte Beweismethode wurde bereits in ähnlicher Weise von Stigum (1973,S.417) benutzt.

Theorem 9.3

Aus den Bedingungen DI-DV folgt:

$$h(p^a,M^a)R^* h(p^b,M^b) \iff M^b<\rho_{b,a}(M^a)$$
$$h(p^b,M^b)R^* h(p^a,M^a) \iff M^b>\rho_{b,a}(M^a).$$

Beweis: Aufgrund von Lemma 9.2 genügt es, den Beweis für $\Rightarrow$" zu führen.

1. Teil: Gilt $h(p^a,M^a)R^* h(p^b,M^b)$, so gibt es gemäß Lemma 9.3 ein $\varepsilon_1>0$, für das $h(p^a,M^a)R^* h(p^b,M^b+\varepsilon_1)$ zutrifft. Infolgedessen folgt $M^b \neq \rho_{b,a}(M^a)$.

Annahme: $\rho_{b,a}(M^a) < M^b$.

Diese Annahme führt auf $h(p^b,M^b)R^* h(p^a,M^a)$, wovon wir aufgrund der Transitivität von R^* auf $h(p^b,M^b)R^* h(p^b,M^b)$ schließen können, was im Widerspruch zur Irreflexivität von R^* steht.

2. Teil: Gilt $h(p^b,M^b)R^* h(p^a,M^a)$, so folgt aus der Annahme, daß $M^b=\rho_{b,a}(M^a)$ mit Hilfe von Lemma 9.3:

(1) $(\exists\varepsilon_2>0)\ [h(p^b,\rho_{b,a}(M^a)-\varepsilon_2)R^* h(p^a,M^a)$.

Da wir in Lemma 9.1 die Gleichung $\rho'_{b,a}(M^a)=\rho_{b,a}(M^a)$ bewiesen haben, folgt aus (1)

$$h(p^b,\rho'_{b,a}(M^a)-\varepsilon_2)R^* h(p^a,M^a),$$

wodurch ein Widerspruch zur Definition von $\rho'_{b,a}(M^a)$ entsteht.

q.e.d.

Führen wir die Relation "indirekt revealed indifferent" ein durch die

Definition 9.5

$$xI^* y :\iff x\bar{R}^* y \wedge y\bar{R}^* x, \quad \forall x,y\in T,$$

so erhalten wir die beiden folgenden Korollare zu Theorem 9.3

Korollar 9.2

Unter Voraussetzung von DI-DV von Theorem 9.3 gilt

$[x^a=h(p^a,M^a)\wedge x^b=h(p^b,\rho_{b,a}(M^a))] \Rightarrow x^a I^* x^b$.

Korollar 9.3

Unter Voraussetzung von DI-DV ist zu jedem $x^a \in T$ und zu jeder Preissituation p^b nur das Güterbündel $x^b=h(p^b,\rho_{b,a}(M^a))$ indirekt revealed indifferent.

Die obigen Ergebnisse liefern uns eine wichtige Information über die zu h gehörigen Engelkurven. Durch diese wird später auch klar, warum die Axiome DI-DV nicht die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion implizieren. Als Engelkurven werden folgende Teilmengen von T bezeichnet:

Definition 9.6

Sei eine Nachfragefunktion $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n_+$ und eine Preissituation p^a gegeben. Dann heißt $\{x|x=h(p^a,M),\ \forall M>0\}$[1] die zu "$p^a$ assoziierte Engelkurve".

Wie leicht aus dieser Definition zu entnehmen ist, zeigen die Engelkurven die Abhängigkeit der Wahl der Güterbündel vom Einkommen, wenn die Preise konstant bleiben, an. Die Bezeichnung "Engelkurve" wurde zu Ehren des Nationalökonomen Engel gewählt. Dieser untersuchte als erster die Abhängigkeit der Nachfrage nach Nahrungsmitteln vom Einkommen, wenn die Preise konstant gehalten werden. In der Literatur wird auch häufig anstelle dieses Begriffs die Bezeichnung "Einkommen-Konsum-Pfad " gewählt. Der folgende Satz weist auf einen engen Zusammenhang zwischen einer speziellen Eigenschaft der Engelkurven von h und der Existenz einer stetigen Nutzenfunktion, die h generiert, hin. Bezeichnen wir die zu p^b assoziierte Engelkurve mit $E(p^b)$, und die Menge $\{x|x\in T\wedge x\bar{R}^* x^a\}$ mit $R(x^a)$, so ist, wie wir sehen werden, das Postulat: $\forall x^a \in T$ gelte "<u>(E): Der Durchschnitt jeder zu einer gegebenen Nachfragefunktion $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n_+$ gehörigen Engelkurve $E(p)$ mit der Menge $B(x^a):=R(x^a)\cap T\setminus R(x^a)$ bestehe aus höchstens einem Punkt</u>", unter der

1) Falls $h(p,M)$ auch für $M=0$ erklärt ist, so heißt die Definition der Engelkurve $\{x|x=h(p^a,M),\forall M\geq 0\}$

Voraussetzung von DI-DV notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $\bar{R}^*$ und damit für die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion (vgl. Fuchs-Seliger (1980, S.616-617)) ist.

Theorem 9.4

Unter der Voraussetzung von DI-DV existiert eine stetige Nutzenfunktion, die $\bar{R}^*$ repräsentiert, dann und nur dann, wenn das Postulat (E) erfüllt ist.

Beweis: 1. Teil:

Aufgrund des Beweises zu Theorem 9.1 (g) wissen wir bereits, daß $\bar{R}^*$ vollständig, transitiv und von oben halbstetig ist, so daß $\overline{R(x^a)} = R(x^a)$ gilt. Wir zeigen nun, daß $\bar{R}^*$ auch von unten halbstetig ist, d.h., daß für beliebiges $x^a \in T$ die Menge

(1) $\quad R^{-1}(x^a) := \{x \mid x \in T \wedge x^a \bar{R}^* x\}$,

abgeschlossen in T ist. Setzen wir

$$P(x^a) := T \setminus R^{-1}(x^a)$$

so ist $P(x^a)$ das Komplement von $R^{-1}(x^a)$ bezüglich T. Wir werden zeigen, daß $P(x^a)$ offen und somit $R^{-1}(x^a)$ abgeschlossen in T ist. Zu diesem Zwecke genügt es nachzuweisen, daß $P(x^a) = \mathrm{int}R(x^a)$[1] in T gilt. Daher zeigen wir zunächst für ein beliebiges $x^b \in T$ die Äquivalenz

(∗) $\quad M^b = \rho_{b,a}(M^a) \iff x^b \in B(x^a)$.

Sei $M^b = \rho_{b,a}(M^a)$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit von h bezüglich M und wegen Lemma 9.3 zu beliebigem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $x^1, x^2 \in U_\varepsilon(x^b)$ derart, daß $x^1 = h(p^b, M^b + \delta)$ und $x^2 = h(p^b, M^b - \delta)$. Da $x^1 R^* x^a$ und $x^a R^* x^2$ erfüllt ist, gilt $x^1 \in R(x^a)$ und $x^2 \in T \setminus R(x^a)$, so daß wir darauf schließen können, daß x^b ein Randpunkt von $R(x^a)$ bezüglich T ist. Infolgedessen gilt $x^b \in B(x^a)$.

[1] int $R(x^a)$ ist eine Abkürzung für Inneres von $R(x^a)$

Um die umgekehrte Richtung nachzuprüfen, setzen wir $x^b \in B(x^a)$ voraus und betrachten $x^u = h(p^b, \rho_{b,a}(M^a))$. Da wir mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen auf $x^u \in B(x^a)$ schließen können, gilt aufgrund von (E) $x^u = x^b$. Deshalb erhalten wir $M^b = \rho_{b,a}(M^a)$.

Wir beweisen nun, daß $P(x^a) = \text{int } R(x^a)$ in T erfüllt ist. Deshalb wollen wir zunächst die Beziehung $\text{int } R(x^a) \subseteq P(x^a)$ untersuchen. Sei $x^c \in \text{int } R(x^a)$. Infolgedessen gilt $x^c \notin B(x^a)$ und wegen (*) $M^c \neq \rho_{c,a}(M^a)$. Aufgrund dieses Ergebnisses und weil außerdem $x^c \in \text{int } R(x^a)$ gilt, können wir mit Hilfe von Lemma 9.3 auf $M^c > \rho_{c,a}(M^a)$ und damit auf $x^c R^* x^a$ schließen. Infolgedessen gilt also $x^c \in P(x^a)$.

Um die Beziehung $P(x^a) \subseteq \text{int } R(x^a)$ in T nachzuweisen, nehmen wir an, es gäbe ein $x^u \in P(x^a)$ und $x^u \in B(x^a)$. Aus $x^u \in P(x^a)$ folgt $x^u R^* x^a$. Wenn aber $x^u \in B(x^a)$, so können wir mit Hilfe von (*) auf $M^u = \rho_{u,a}(M^a)$, schließen, so daß wir auf Grund von Korollar 9.2 $x^u I^* x^a$ erhalten, was im Widerspruch zu $x^u R^* x^a$ steht.

Da infolge der obigen Ergebnisse $\bar{R}^*$ transitiv, vollständig und stetig ist, können wir den Satz von Debreu anwenden und erhalten, daß $\bar{R}^*$ von einer stetigen Nutzenfunktion repräsentiert werden kann, die aufgrund von Theorem 9.1 (f) die Nachfragefunktion h generiert.

2. Teil: Wir setzen nun voraus, daß $\bar{R}^*$ von einer stetigen Nutzenfunktion repräsentiert werden kann, so daß infolgedessen auch $\bar{R}^*$ stetig ist. Von dem Beweis zu Teil 1 wissen wir bereits, daß wegen der vorausgesetzten Axiome DI-DV das Güterbündel $x^b = h(p^b, \rho_{b,a}(M^a))$ Element des Durchschnitts von $E(p^b)$ und $B(x^a)$ ist. Nehmen wir nun an, es gäbe noch ein anderes Güterbündel $\tilde{x}^b = h(p^b, M^b)$ in $E(p^b) \cap B(x^a)$!

Gilt $M^b < \rho_{b,a}(M^{\alpha})$, so können wir mit Lemma 9.2 auf $x^a R^* \tilde{x}^b$ schließen. Da $\bar{R}^*$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon>0$ mit der Eigenschaft: für alle $x \varepsilon U_{\varepsilon}(\tilde{x}^b) \cap T$ gilt $x^a R^* x$. Da wir aber $\tilde{x}^b \varepsilon B(x^a)$ angenommen haben, erhalten wir auf diese Weise einen Widerspruch.

Auch wenn wir annehmen, daß $M^b > \rho_{b,a}(M^a)$, ergibt sich ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß $\tilde{x}^b$ zu $B(x^a)$ gehört. Deshalb gilt $M^b = \rho_{b,a}(M^a)$ und damit auch $\tilde{x}^b = x^b$.

q.e.d.

Anstelle der Bedingung (E) können wir jedoch auch eine andere setzen, die ebenfalls unter der Voraussetzung von DI-DV notwendig und hinreichend für die Existenz einer stetigen, h generierenden Nutzenfunktion ist. Diese Forderung ist insofern mit (E) verwandt, daß sie wie diese über den Rand der Menge $\{x | x\bar{R}^* x^a\}$ eine Aussage macht.

Die Forderung (E) ist jedoch nur für $T \equiv \mathbb{R}^n_{++}$ relevant. Will man eine stetige Nutzenfunktion auf $T \equiv R^n_+$ finden, so benötigen wir noch eine zusätzliche Bedingung. Dies wird in dem Theorem 9.7 gezeigt werden.
Zur Vorbereitung beweisen wir zunächst, daß die Menge $R(x^a) = \{x | x \varepsilon T \wedge x \bar{R}^* x^a\}, \forall x^a \in T$, konvex ist.

Lemma 9.4

Unter Voraussetzung von DI-DV ist $R(x^a)$ konvex.
Beweis: Sei $x^1, x^2 \varepsilon R(x^a)$. Dann gilt wegen Theorem 9.1 (g), daß $\bar{R}^*$ vollständig ist, so daß $x^1 \bar{R}^* x^2 \vee x^2 \bar{R}^* x^1$ gilt.

O.B.d.A. sei $x^1 \bar{R}^* x^2$. Da aufgrund von Theorem 9.1 (d) für alle γ mit $0<\gamma<1$ die Beziehung $((1-\gamma)x^1+\gamma x^2) R^* x^2$ zutrifft, gilt auch $((1-\gamma)x^1+\gamma x^2) \bar{R}^* x^2$. Hieraus und wegen $x^2 \bar{R}^* x^a$ folgt jedoch mit der Transitivität von $\bar{R}^*$, die wir in Theorem 9.1 (g) bewiesen haben, die Behauptung.

Theorem 9.5

Sei $h : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Postulate DI-DV erfüllt. Ferner sei

DVI: Für jede Folge $\langle(p^\nu, M^\nu)\rangle$ mit $(p^\nu, M^\nu) \in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ gelte:
$[\lim_{\nu\to\infty} p^\nu = p^o \geq 0 \wedge \lim_{\nu\to\infty}(p^\nu, M^\nu) = \bar{x} > 0] \Rightarrow p^o > 0$

erfüllt. Dann gibt es eine stetige Nutzenfunktion die $\bar{R}^*$ repräsentiert und die gegebene Nachfragefunktion generiert.

Beweis: Wegen Theorem 9.1 genügt es, wie bei dem vorangegangenen Satz zu überprüfen, ob $\{x | x^o \bar{R}^* x\}$ für jedes $x^o \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n_{++}$ ist.

Annahme: Es gibt ein $x^o \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ mit der Eigenschaft, daß die Menge $R^{-1}(x^o) = \{x | x \in \mathbb{R}^n_{++} \wedge x^o \bar{R}^* x\}$ nicht in $\mathbb{R}^n_{++}$ abgeschlossen ist. Dann existiert ein $\bar{x} \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}, \bar{x} = h(\bar{p}, \bar{M})$, und eine Folge von Güterbündeln $\langle x^\nu\rangle$ in $R^{-1}(x^o)$ derart, daß $\lim_{\nu\to\infty} x^\nu = \bar{x}$ und $\bar{x} \notin R^{-1}(x^o)$. Infolgedessen gilt für alle x^ν $x^o \bar{R}^* x^\nu$, wohingegen für $\bar{x}$ die Beziehung $\bar{x} R^* x^o$ zutrifft. Da aufgrund der Bedingungen DIII und DV die Funktion h homogen vom Grade 0 ist, können wir die p^ν so wählen, daß $\|p^\nu\| = \|\bar{p}\|$ gilt. Aus diesem Grunde existiert eine Teilfolge $\langle p^{\nu_k}\rangle$ von $\langle p^\nu\rangle$ derart, daß $\lim_{\nu_k\to\infty} p^{\nu_k} = \tilde{p}$. Da aber $\|p^{\nu_k}\| = \|\bar{p}\|$, erhalten wir $\tilde{p} \geq 0$. Wegen $\lim_{\nu_k\to\infty} h(p^{\nu_k}, M^{\nu_k}) \cdot \lim_{\nu_k\to\infty} p^{\nu_k} = \lim_{\nu_k\to\infty} M^{\nu_k} = \tilde{M}$ gilt $\bar{x}\tilde{p} = \tilde{M}$. Da $\lim_{\nu_k\to\infty} x^{\nu_k} = \bar{x}$ und $\lim_{\nu_k\to\infty} p^{\nu_k} = \tilde{p} \geq 0$, impliziert DVI, daß $\tilde{p} > 0$ erfüllt ist. Infolgedessen erhalten wir aufgrund der Stetigkeit von h das Ergebnis $\lim_{\nu_k\to\infty} h(p^{\nu_k}, M^{\nu_k}) = \bar{x} = h(\tilde{p}, \tilde{M})$.

Wir zeigen nun, daß die Hyperebenen $H^{\nu k}=\{x|x\in\mathbb{R}^n \wedge p^{\nu k}x=M^{\nu k}\}$ die Menge $R(x^o)=\{x|x\in\mathbb{R}^n_{++} \wedge x\bar{R}^*x^o\}$ nicht schneiden.

Annahme: Es gibt eine Hyperebene $H^{\nu j}$, die $R(x^o)$ schneidet. Dann existiert ein $z\in R(x^o)$ derart, daß $p^{\nu j}z < M^{\nu j}$. Diese Ungleichung führt auf das Ergebnis $x^{\nu j}R^*z$. Da aber $z\in R(x^o)$, so folgt $z\bar{R}^*x^o$. Von $x^{\nu j}R^*z$ und $z\bar{R}^*x^o$ führt die Transitivität und Vollständigkeit von $\bar{R}^*$ auf $x^{\nu j}R^*x^o$. Aber weil $x^{\nu j}$ aus $R^{-1}(x^o)$ ist, und daher $x^o\bar{R}^*x^{\nu j}$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch. Deshalb muß die Annahme verworfen werden.
Da $p^{\nu k}\rightarrow\tilde{p}$ und $M^{\nu k}\rightarrow\tilde{M}$, streben die Hyperebenen $H^{\nu k}$ gegen die Hyperebene $\tilde{H}=\{x|x\in\mathbb{R}^n \wedge \tilde{p}x=\tilde{M}\}$. Da wir bereits nachgewiesen haben, daß die Menge $R(x^o)$ eine konvexe Menge ist, ist $\tilde{H}$ Stützhyperebene in $\bar{x}$ an $R(x^o)$. Deshalb gilt

(1) $\quad (\forall y\in\mathbb{R}^n_{++})[\tilde{p}y<\tilde{M} \Rightarrow y\notin R(x^o)]$.

Wenden wir nun wieder das Korollar 9.2 und Theorem 9.3 an, so erhalten wir, daß das Güterbündel $x^c=h(\tilde{p},M^c)$ mit $M^c=\sup\{M|h(p^o,M^o)R^*h(\tilde{p},M)\}$ auf dem Rand von $R(x^o)$ liegt. Da $\bar{x}R^*x^o$, folgt aufgrund von Theorem 9.3 $\tilde{M}>M^c$. Wegen $M^c=\tilde{p}\cdot x^c<\tilde{M}$, ergibt sich mit (1) $x^c\notin R(x^o)$. Da aber wegen Theorem 9.1 (e) die Gleichung $\overline{R(x^o)}=R(x^o)$ gilt, gehören die Randpunkte von $R(x^o)$ und damit auch x^c zu $R(x^o)$, was im Widerspruch zu dem zuvor erhaltenen Resultat steht.
Wir haben damit als Ergebnis gewonnen, daß die Menge $R^{-1}(x^o)$ abgeschlossen ist, so daß wir aufgrund der bereits gefundenen Resultate in Theorem 9.1 den Satz von Debreu anwenden können. Wir erhalten daher eine stetige Nutzenfunktion, die $\bar{R}^*$ repräsentiert und die gegebene Nachfragefunktion h generiert.

q.e.d.

Es soll nun gezeigt werden, daß eine geringfügige Änderung von DVI notwendig und hinreichend für die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion ist.

Theorem 9.6

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ eine Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Prämissen DI-DV erfüllt. Dann ist unter diesen Bedingungen das Postulat:

DVI': Für alle $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ und für jede beliebige Folge $\langle(p^v,M^v)\rangle$ in $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ mit den Eigenschaften $h(p^v,M^v) \notin R(x^a)$, $\lim_{v\to\infty} h(p^v,M^v) = x^c > 0$, $x^c \in R(x^a)$ und $\lim_{v\to\infty} p^v = p^o \geq 0$ gilt, daß $p^o > 0$ zutrifft

notwendig und hinreichend für die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion, die $\bar{R}^*$ repräsentiert und h generiert.

Beweis: Sei h eine stetige Nutzenfunktion, die $\bar{R}^*$ repräsentiert und h generiert. Hieraus ergibt sich mit Theorem 9.4, daß die zu beliebigem $p>0$ assoziierte Engelkurve $H_p = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \wedge x = h(p,M), \forall M>0\}$ nur einen gemeinsamen Punkt mit dem Rand $B(x^a)$ für jedes $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ besitzt.

Angenommen, DVI' wäre nicht allgemein erfüllt. Dann gibt es ein $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ und eine Folge $\langle h(p^v,M^v)\rangle$ mit den Eigenschaften:

$$h(p^v,M^v) \notin R(x^a),\ \lim_{v\to\infty} h(p^v,M^v) = x^b \in R(x^a),\ \lim_{v\to\infty} M^v = M^o > 0 \text{ und}$$
$$\lim_{v\to\infty} p^v = p^o \geq 0 \text{ aber } p^o \not> 0.$$

Wie wir im vorangegangenen Theorem gezeigt haben, ist die Hyperebene $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge p^o x = M^o\}$ Stützhyperebene an $R(x^a)$ in x^b. Infolgedessen gibt es ein $x^z = h(p^z,M^z)$ derart, daß $x^z \geq x^b$ und $x^z p^o = M^o$. Deshalb ist x^z ein Randpunkt von $R(x^a)$, und es gilt $x^z R^* x^a$.

Berücksichtigen wir wieder unser Theorem 9.3, so ist das Element $\tilde{x} = h(p^z, \rho_{z,a}(M^a))$ Randpunkt von $R(x^a)$. Demnach hätte die Engelkurve $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge x = h(p^z,M), \forall M>0\}$ zwei verschiedene Punkte nämlich $\tilde{x}$ und x^z gemeinsam mit $R(x^a)$, das aber widerspricht der obigen Bemerkung.

Da wir mit Theorem 9.5 bereits die Umkehrung dieses Satzes gezeigt haben, ist dieser Beweis damit abgeschlossen.

9.5 Einige spezielle Klassen von Nachfragefunktionen

In den beiden vorangegangenen Theoremen haben wir nur das Problem der Existenz einer stetigen Nutzenfunktion untersucht, wenn der Wertebereich von h der $\mathbb{R}^n_{++}$ ist. Es soll nun eine Bedingung, die zu DI-DVI hinzugenommen, die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n_+$ garantiert, genannt werden. Diese Prämisse, die wir bereits bei Stigum((1973), S.412) nachlesen können, heißt:

DVII: Für alle x^1, $x^2 \in \mathbb{R}^n_+$ mit $x^1 \not> o$ und $p^1x^1 > p^1x^2$ gibt es ein $x^3 \in \mathbb{R}^n_+$ derart, daß $x^3 \leq x^1$ und $p^3x^3 > p^3x^2$.

Um den ganzen $\mathbb{R}^n_+$ zu erfassen, müssen wir außerdem in DI fordern, daß h auf dem Bereich $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ erklärt ist. Wir bezeichnen dann diese geänderte Version von DI mit DI'. Die Theoreme 9.1 und 9.6 ändern sich auch nicht, wenn wir an die Stelle von DI das Postulat DI' setzen. Wir gelangen dann zu folgendem Satz:

Theorem 9.7

Setzen wir DI', DII-DVII voraus, so gibt es eine stetige Nutzenfunktion, die $\bar{R}^*$ auf dem $\mathbb{R}^n_+$ repräsentiert und h generiert.

Beweis:

Angenommen , es gäbe ein $x^o \in \mathbb{R}^n_+$ derart, daß $R^{-1}(x^o)$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n_+$ ist. Dann gibt es eine Folge $<x^\nu>$ in $R^{-1}(x^o)$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} x^\nu = \bar{x}$ und $\bar{x} \notin R^{-1}(x^o)$, so daß definitionsgemäß $\bar{x}R^*x^o$ gilt. Falls $\bar{x}>o$, so können wir den Beweis von Theorem 9.5 , in dem es keine Rolle spielt, ob $x^o \in \mathbb{R}^n_{++}$ oder $x^o \in \mathbb{R}^n_+$, im Wortlaut übernehmen und kommen so zu einem Widerspruch.

Wir führen nun den Beweis für $\bar{x} \not> o$. Aus $\bar{x}R^*x^o$ folgt unmittelbar $\bar{x} \neq o$. Es soll zunächst gezeigt werden, daß die Hyperebene $\bar{H}=\{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge \bar{p}x=\bar{M}\}$ Stützhyperebene an $R(x^o)$ in $\bar{x}$, wobei $\bar{x}=h(\bar{p},\bar{M})$, ist.

Nehmen wir wieder das Gegenteil an, so gibt es ein $x^i \in R(x^o)$ derart, daß $\bar{p}x^i < \bar{M}$. Nach DVII existiert $x^u \leq \bar{x}$ mit $p^ux^u > p^ux^i$. Aus $x^uR^*x^i$

und $x^i\bar{R}^*x^o$ folgt mit der Transitivität und Vollständigkeit von $\bar{R}^*$ $x^uR^*x^o$, was im Widerspruch dazu steht, daß $\bar{x}$ ein Randpunkt von $R(x^o)$ relativ zu $\mathbb{R}^n_+$ ist.
Wir können nun direkt wie in dem Beweis zu Theorem 9.5 fortfahren und erhalten einen Widerspruch zu unserer Annahme.

Wir wollen nun noch in zwei Spezialfällen die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion nachweisen. Aus diesem Grunde wird ein neuer Begriff eingeführt.

Definition 9.7

Eine Nachfragefunktion $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ heißt superior genau dann, wenn für beliebiges $p\in\mathbb{R}^n_{++}$ und für alle $M,M'\in\mathbb{R}_{++}$ gilt:

$$M>M' \Rightarrow h(p,M) > h(p,M').$$

Bei superioren Nachfragefunktionen wächst also mit steigendem Einkommen die Nachfrage nach allen Gütern des Warenkorbes an, wenngleich dieser Zuwachs bei einzelnen infinitesimal klein sein kann.

Der nächste Satz nennt Bedingungen, unter denen eine superiore Nachfragefunktion von einer stetigen Nutzenfunktion generiert wird.

Theorem 9.8

Sei $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ eine superiore Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die den Bedingungen DI-DIII und DV genügt. Dann gibt es eine stetige Nutzenfunktion, die h generiert.
Beweis: 1. Zunächst wollen wir den Nachweis dafür erbringen, daß jede superiore Nachfragefunktion die Prämisse DIV erfüllt. Betrachten wir dazu $p^o,p^1\in\mathbb{R}^n_{++}$ und $p(t)=p^o+t(p^1-p^o)$ für $t\in[0,1]$. Ferner sei $M''=M'+\Delta M$ mit $\Delta M>o$. Da h superior ist, gilt demgemäß

$$h(p(t),M'') - h(p(t),M') = h(p(t),M'') - \frac{M''-\Delta M}{M''}\,h(p^t,M'') = (\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)>0.$$

Da $\Delta M=\Delta x_1p_1(t) + .. + \Delta x_np_n(t)>0$, gilt $\Delta x_ip_i(t) < \Delta M$, bzw.

$\Delta x_i < \frac{\Delta M}{p_i(t)}$ für alle $i \leq n$.

Hiermit gewinnen wir das Ergebnis

$$\| h(p(t),M'') - h(p(t),M') \| = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \Delta M \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i(t)} < K|M''-M'|,$$ wobei

durch die Definition von $p(t)$ die Existenz einer solchen positiven Zahl K garantiert wird. Damit ist DV bewiesen.

2. Aufgrund von Theorem 9.1 genügt es nun, wie im vorigen Beweis, die Abgeschlossenheit der Menge $R^{-1}(x^o)$ in $\mathbb{R}^n_{++}$ für beliebiges $x^o \in \mathbb{R}^n_{++}$ nachzuprüfen. Der Beweis dafür wird indirekt geführt.
Unter der Annahme, die Menge $R^{-1}(x^o)$ wäre nicht abgeschlossen, gibt es eine Folge $\langle x^v \rangle$ in $R^{-1}(x^o)$ mit $\lim_{v \to \infty} x^v = x^b = h(p^b, M^b)$,

wobei $x^b \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $x^b \notin R^{-1}(x^o)$. Dann gilt $x^b R^* x^o$ und x^b ist Randpunkt von $R(x^o)$ relativ zu $\mathbb{R}^n_{++}$.
Außerdem folgt aus Theorem 9.4, daß auch $\tilde{x}^b = h(p^b, \rho_{b,o}(M^o))$ Randpunkt von $R(x^o)$ ist, und ebenfalls aufgrund dieses Satzes gilt $M^b > \rho_{b,o}(M^o)$. Hiervon können wir auf $h(p^b,M^b) > h(p^b, \rho_{b,o}(M^o))$ schließen. Infolgedessen gibt es wegen der Stetigkeit von h ein $\varepsilon > o$ und eine offene Umgebung $U_\varepsilon(x^b)$ derart, daß alle $x \in U_\varepsilon(x^b)$ die Beziehung $x R^* h(p^b, \rho_{b,o}(M^o))$ erfüllen. Dann gilt aber auch für alle $x \in U_\varepsilon(x^b)$ $x \bar{R}^* x^o$. Das aber widerspricht unserer Folgerung, daß x^b ein Randpunkt von $R(x^o)$ ist. Wenden wir dann wieder den Satz von Debreu an, so erhalten wir eine stetige Nutzenfunktion, die die Relation $\bar{R}^*$ auf $\mathbb{R}^n_{++}$ repräsentiert und die Nachfragefunktion aufgrund von Theorem 9.1 (g) auch generiert.

q.e.d.

Uzawa hat unter anderem auch die Frage untersucht, ob invertierbare[1] Nachfragefunktionen von einer stetigen Nutzenfunktion generiert werden (1971, Theorem 3). Solche Funktionen stellen das Nachfrageverhalten eines Individuums unter der Bedingung, daß jedes Güterbündel in nur einer Preissituation gewählt werden kann, dar. Wir zeigen nun, daß zu solchen Funktionen eine stetige Nutzenfunktion

[1] Unter einer invertierbaren Funktion wollen wir eine Funktion verstehen, deren Umkehrrelation ebenfalls Funktion ist.

existiert und schließen damit eine Lücke in Uzawas Beweis [1].

Theorem 9.9

Eine Nachfragefunktion $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$ erfülle die Prämissen DI-DV. Ferner sei für jedes Güterbündel $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ die Preis~~einkommens~~situation p von x bis auf ein positives Vielfaches eindeutig bestimmt. Dann gibt es eine stetige Nutzenfunktion, die die Relation $\bar{R}^*$ repräsentiert und h generiert.

Beweis (indirekt): Es genügt wieder zu zeigen, daß $R^{-1}(x^a)$ für jedes x^a abgeschlossen ist. Unter der Annahme, es existierte ein $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ mit der Eigenschaft $R^{-1}(x^a)$ wäre nicht abgeschlossen, gibt es ein $x^c \in \mathbb{R}^n_{++}$ und eine Folge $\langle x^v \rangle$ derart, daß $x^v \in R^{-1}(x^a)$, $x^c = \lim_{v\to\infty} x^v$ und $x^c \notin R^{-1}(x^a)$. Hieraus folgt definitionsgemäß $x^c R^* x^a$.

Da h homogen vom Grade 0 ist, können wir wieder die p^v so wählen, daß $\|p^v\| = \|p^c\|$ Daher gibt es eine Teilfolge $\langle p^{v_k} \rangle$ von $\langle p^v \rangle$ derart, daß $\lim_{v_k\to\infty} p^{v_k} = \tilde{p} \geq 0$. Infolgedessen gilt auch

$$(1) \qquad \lim_{v_k\to\infty} p^{v_k} \cdot \lim_{v_k\to\infty} x^{v_k} = \lim_{v_k\to\infty} (p^{v_k} x^{v_k}) = \lim_{v_k\to\infty} M^{v_k} = \tilde{M} > 0.$$

Betrachten wir das Güterbündel $\tilde{x}^a = h(p^a, \rho_{a,c}(M^c)) = h(p^a, \tilde{M}^a)$, so gilt für dieses $\tilde{x}^a R^* x^a$, $\tilde{x}^a I^* x^c$ und x^c ist Randpunkt von $R(\tilde{x}^a)$. Hieraus folgt, daß die Punktmenge $H_{p^c} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge p^c x = M^c\}$ Stützhyperebene in x^c an $R(\tilde{x}^a)$ ist. Aber auch die Hyperebene $H_{\tilde{p}} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge \tilde{p} \cdot x = \tilde{M}\}$ ist Stützhyperebene in x^c an $R(\tilde{x}^a)$, denn angenommen, das wäre nicht der Fall und $H_{\tilde{p}}$ würde $R(\tilde{x}^a)$ schneiden, so gäbe es ein $x^i \in R(\tilde{x}^a)$ mit der Eigenschaft $\tilde{p}x^i < \tilde{M}$ und $x^i R^* \tilde{x}^a$. Da $H_{\tilde{p}}$ Stützhyperebene in x^c an $R(x^a)$ ist, gilt $x^a R^* x^i$. Von $\tilde{x}^a R^* x^a$ und $x^a R^* x^i$ können wir jedoch auf $\tilde{x}^a R^* x^i$ schließen und erhalten somit einen Widerspruch zu $x^i R^* \tilde{x}^a$. Infolgedessen sind die Hyperebenen H_{p^c} und $H_{\tilde{p}}$ beides Stützhyperebenen in x^c an $R(\tilde{x}^a)$.

Definieren wir ferner für $t \in]0,1[$

---

[1] Uzawa verwendet zum Beweis von Theorem 3 das Ergebnis PVI', dessen Beweis lückenhaft ist

$$p(t):=t(p^c) + (1-t)\,\tilde{p},$$

so gilt $p(t)>o$. Wir wollen nun zeigen, daß x^c in allen Preissituationen $p(t)$ gewählt wird. Der Beweis hierfür wird wieder indirekt geführt.

Annahme: Es gibt ein $t'\in]o,1[$ mit

$$x^c \neq h(p(t'),\ p(t')x^c) = x(t').$$

Setzen wir $x(t')=h(p(t'),\ M(t'))$, so folgt unmittelbar, daß $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^n \wedge p(t')\cdot x = M(t')\}$ Stützhyperebene an $R(\tilde{x}^a)$ in x^c ist. Ferner gilt $x(t')R^*x^c$ und damit auch $x(t')R^*\tilde{x}^a$.

Setzen wir

$$\rho_{t',a}(\tilde{M}^a) = \inf\,\{M\,|\,h(p(t'),M)R^*h(p^a,\tilde{M}^a)\},$$

so gibt es ein x' mit $x'=h(p(t'),\rho_{t',a}(\tilde{M}^a))$ und x' ist Randpunkt von $R(\tilde{x}^a)$.

Da aus $x(t')R^*h(p^a,\tilde{M}^a)$ die Ungleichung $M(t') > \rho_{t',a}(\tilde{M}^a)$ folgt und ferner die Punktmenge $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^n \wedge p(t')x=M(t')\}$ Stützhyperebene an $R(\tilde{x}^a)$ in x^c ist, gilt $x'\notin R(\tilde{x}^a)$. Aber wie wir bereits wissen, folgt aus DI-DV die Beziehung $\overline{R(\tilde{x}^a)} = R(\tilde{x}^a)$, so daß die Menge $R(\tilde{x}^a)$ alle ihre Randpunkte und damit auch x' enthält, was im Widerspruch zu $x'\notin R(\tilde{x}^a)$ steht. Also müssen wir unsere Annahme verwerfen und erhalten das Ergebnis:

$$(\forall t\in]0,1[)[h(p(t'),\ p(t')x^c) = x^c].$$

Gilt nun $\tilde{p}\neq p^c$, so erhalten wir einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß die Preissituation, in der x^c gewählt wird, bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt ist. Infolgedessen erhalten wir als Ergebnis $\tilde{p}=p^c$, wovon wir mit (1) auch auf $\tilde{M}=M^c$ schließen können.

Wir können nun wie im Beweis zu Theorem 9.5 fortfahren und erhalten wie dort, daß die Hyperebene $H^{\vee k}=\{x\,|\,p^{\vee k}\cdot x=M^{\vee k}\}$ die Menge

$R(x^a)$ nicht schneiden und daß die Punktmenge $H_{\tilde{p}}$ Stützhyperebene in x^c an $R(x^a)$ ist. Letzteres ist aber gleichbedeutend damit, daß H_{p^c} Stützhyperebene in x^c an $R(x^a)$ ist. Aber auch das Güterbündel $h(p^c, \rho_{c,a}(M^a))$ ist Randpunkt von $R(x^a)$ und die Hyperebene $\tilde{H}_{p^c}$ mit der Gleichung $p^c x = \rho_{c,a}(M^a)$ ist Stützhyperebene in x^c an $R(x^a)$. Da man aber von $x^c R^* x^a$ auf $M^c > \rho_{c,a}(M^a)$ schließen kann, widerspricht dies unserem früheren Resultat, daß H_{p^c} Stützhyperebene in x^c an $R(x^a)$ ist.
Damit können wir unsere Annahme verwerfen und erhalten, daß $R^{-1}(x^a)$ abgeschlossen ist, womit unsere Behauptung unmittelbar folgt.

9.6 Zur Ableitbarkeit der Nachfragegesetze

Um die Gleichwertigkeit der Theorie der Revealed Preference mit anderen Modellen der Nachfragetheorie sicherzustellen, ist eine Untersuchung der Frage, ob die einschlägigen Gesetze der Nachfragetheorie auch in diesem Modell ableitbar sind, erforderlich. Von besonderer Bedeutung ist hierbei, ob die Symmetrie und Negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix auch in der Theorie der Revealed Preference gewährleistet ist. Während durch die Symmetrie eine Aussage über die Substituierbarkeit von Gütern gemacht wird, garantiert die Negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix, daß das in einer Budgetsituation gewählte Güterbündel auch nutzenmaximal ist, bzw., daß der Marktteilnehmer bezüglich seiner Präferenzvorstellung optimal und damit rational handelt.
Bevor diese Frage untersucht wird, sollen die beiden oben angesprochenen Begriffe erklärt werden.

Definition 9.8

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+, h(p,M) = (h_1(p,M), \ldots, h_n(p,M))$, eine Nachfragefunktion, deren Wertebereich eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n_+$ ist. Dann seien die Slutsky-Hicks-Terme $S_{ij}(p,M)$ Ausdrücke der Form

$$S_{ij}(p,M) := \left(\frac{\partial h_i(p,M)}{\partial p_j}\right)\Bigg|_{u(x_1..x_n)=\text{const.}} = \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial p_j} + \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial M} \cdot h_j(p,M).$$

$M = \sum_{j=1}^{n} h_j(p,M) \cdot p_j$

Ein solcher Term läßt sich bekanntlich in sinnvoller Weise interpretieren: Er gibt an, wie sich die Nachfrage nach einem Gut i ändert, wenn sich der Preis des Gutes j ändert aber das Nutzenniveau erhalten bleibt, weil durch eine Einkommensänderung die Preisänderung kompensiert wird.
Die Slutsky-Hicks-Matrix besitzt die Terme S_{ij} als Komponenten, d.h. also

$$S(p,M) := \begin{pmatrix} S_{11}(p,M) & \dots & S_{1n}(p,M) \\ S_{n1}(p,M) & \dots & S_{nn}(p,M) \end{pmatrix}$$

Eine Slutsky-Hicks-Matrix ist definitionsgemäß negativ semidefinit, wenn

$$(\forall v \in \mathbb{R}^n)[v'S(p,M)\, v \leqq 0];$$

sie ist symmetrisch, wenn

$$S_{ij} = S_{ji} \quad , \quad \forall i,j \leqq n$$

Die Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix bedeutet, daß die Nachfrageänderung nach dem i-ten Gut bei einer kompensierten Preisänderung des j-ten Gutes gleich der Nachfrageänderung nach dem j-ten Gut bei einer kompensierten Preisänderung des i-ten Gutes ist.

Im nächsten Theorem soll gezeigt werden, daß das verallgemeinerte Gesetz der Nachfrage

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \Delta x_i < 0 \quad ,$$

falls mindestens ein $\Delta x_i \neq 0$, in der Theorie der Revealed Preference deduziert werden kann. Die Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i = 0$ ist aus der

traditionellen Nachfragetheorie bekannt und bedeutet, daß der Nutzen konstant bleibt. Der Grund ist folgender:
Das Maximierungsproblem

$$\max u(x) \text{ unter der Nebenbedingung}$$
$$p.x \leq M$$

wird mit Hilfe der Methode der Langrangeschen Multiplikatoren gelöst, so daß wir im Nutzenmaximum $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda pi$ erhalten.

Da u konstant bleiben soll, d.h. also

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

gilt, muß das Differential

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \quad \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$ (falls alle Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllt sind)

zu Null werden. Hieraus erhält man schließlich als Lösung:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0.$$

Diese Beziehung setzen wir in Theorem 9.11 voraus, beweisen aber zunächst vorbereitend das "allgemeine Gesetz der Nachfrage" (vgl. Hicks (1956, S.151-155)).

Theorem 9.10

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$, eine Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Axiome DI-DIII und das Schwache Axiom (WA"): $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
erfüllt. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i \, \Delta x_i < 0,$$

falls mindestens ein $\Delta x_i \neq 0$.

Beweis: Für beliebige $x, x' \in \mathbb{R}^n_{++}$ sei

$\Delta p_i = (p_i - p'_i)$ und $\Delta x_i = (x_i - x'_i)$, $\forall i \leq n$.

Dann gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta x_i = 0 \text{ bzw. } \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x_i') = 0 \quad .$$

Also folgt xRx', so daß wir hieraus unter Anwendung des Schwachen Axioms $\neg(x'Rx)$ erhalten. Demzufolge gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' \, x_i' < \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i \text{ bzw. } \sum_{i=1}^{n} p_i' (x_i' - x_i) < 0,$$

so daß

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i' - x_i) + \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i (x_i - x_i') < 0,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

q.e.d.

Mit Hilfe des vorangehenden Resultates läßt sich nun der nächste Satz, der auf die negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix führt, beweisen (vgl. Samuelson (1947, S.113)).

Theorem 9.11

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$, $x=h(p,M)$, eine Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Axiome DI-VIII und DV erfüllt und außerdem stetig differenzierbar[1] ist. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \Rightarrow \sum_{i,j}^{n} S_{ij} \, d_{p_i} \, d_{p_j} \leq o$$

Beweis: Als totales Differential von x_i erhalten wir

$$(1) \qquad dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot dp_j + \frac{\partial x_i}{\partial M} \, dM$$

Aus der Budgetgleichung ergibt sich

---

[1] Aus der Voraussetzung der Differenzierbarkeit folgt, daß h auch DIV erfüllt.

$$dM = \sum_{j=1}^{n} x_j \; dp_j ,$$

falls x_j konstant gehalten wird. Mit (1) können wir dann auf

$$(2) \quad dx_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial M}\right) dp_j = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \; dp_j$$

schließen.

Von $\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0$ führt der vorangehende Satz zusammen mit (2) auf grund der weiteren Voraussetzungen diese Theorems zu

$$\sum_{i,j}^{n} S_{ij} \; dp_i \; dp_j < 0$$

Hieraus folgt unmittelbar das

Korollar 9.4

Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes gilt:

$$v'S(p,M) \; v \leqq 0 , \quad \forall v \in \mathbb{R}^n .$$

Es ist hierbei zu beachten, daß im nichttrivialen Fall das Gleichheitszeichen nur dann steht, wenn sich die einzelnen Preise der Güter des Warenkorbes im gleichen Verhältnis geändert haben. Ursache hierfür ist, daß unter den Voraussetzungen DIII und DV die Nachfragefunktion homogen vom Grade 0 ist.

Die Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix kann mit Hilfe eines Ergebnisses von Kihlstrom, Mas-Colell und Sonnenschein (1976), auf das wir später noch kurz zurückkommen, nachgewiesen werden.

Theorem 9.12

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ eine stetig differenzierbare Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, die die Axiome DIII und DV erfüllt. Dann ist die zu h gehörende Slutsky-Hicks-Matrix symmetrisch.

Beweis: Da h aufgrund der Prämissen DIII und DV homogen vom Grade o ist, können wir einen Satz von Kihlstrom, Mas-Colell und Sonnenschein (vgl. Theorem 9.16) verwenden und erhalten sofort die Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix.

Die hier nachgewiesene Ableitbarkeit der wichtigsten Gesetze der Nachfragetheorie rechtfertigt die Hypothesen, die der Theorie der Revealed Preference zugrundeliegen. Es soll nun noch von dieser gezeigt werden, wie sie in der Theorie der ökonomischen Preisindizes Verwendung findet.

9.7 Die Theorie der Revealed Preference und der ökonomische Preis-Index

Samuelson wurde zu seinem Schwachen Axiom durch Überlegungen, die zur Bestimmung des Lebenshaltungskostenindex' führen, inspiriert. Im unmittelbaren Zusammenhang mit diesen steht auch der " Indifferenztest" von Hicks (1956) mit folgendem Inhalt:

Gehören zwei Güterbündel x^o und x^1, die ein Haushalt beim Preisniveau p^o bzw. p^1 erworben hat, einer Indifferenzklasse an, so müssen sie den Bedingungen

$$(1)\quad p^o x^o \leq p^o x^1$$

und

$$(2)\quad p^1 x^1 \leq p^1 x^o$$

genügen. Folgende Interpretation der ersten Ungleichung liegt nahe: Hat ein Haushalt in der Preissituation p^o den Warenkorb x^o erworben, so kann x^o nicht teurer als x^1 gewesen sein, denn sonst hätte er den Warenkorb x^1, den er ja ebenso hoch einschätzt wie x^o, gewählt. Auf analoge Weise kann die zweite Ungleichung gedeutet werden.
Durch Multiplikation von (1) und (2) ergibt sich:

$$(3)\quad (p^o x^1)(p^1 x^o) \geq (p^o x^o)(p^1 x^1).$$

Hicks nennt diese Ungleichung das "Indexzahlen-Theorem", da aus diesem folgt, daß der Laspeyres-Index[1] größer oder gleich dem Paasche-Index[2] ist.

[1] $L_a = \dfrac{p^1 x^o}{p^o x^o}$

[2] $P_a = \dfrac{p^1 x^1}{p^o x^1}$

Gehören x^o und x^1 nicht der selben Indifferenzfläche an, so muß

(4) $\neg(p^o x^1 \geq p^o x^o \wedge p^1 x^o \geq p^1 x^1)$

zutreffen. Diese Aussagenform deutet bereits auf eine enge Verwandtschaft des ökonomischen Preisindex mit dem Schwachen Axiom hin.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich der ökonomische Preisindex bei Kenntnis der Funktion $\rho_{b,a}$ leicht berechnen läßt. Deshalb erinnern wir zunächst an die Definition des ökonomischen Preisindex.

Definition 9.9

Der ökonomische Preisindex P ist ein Funktional mit folgenden Eigenschaften:

$P: \mathbb{R}^{2n}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$; $P(p^o,p^1;M^o) = \frac{M^1}{M^o}$ mit $M^1 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} p^1 \cdot x$ und $u(x) = u(x^o)$, wobei $x^o \in B(p^o,M^o)$ und $u(x^o) \geq u(y)$ für alle $y \in B(p^o,M^o)$.

Die Definition führt in wenigen Schritten zu dem

Theorem 9.13

Sei DI-DV vorausgesetzt. Dann erfüllt der ökonomische Preisindex für alle $p^a,p^b \in \mathbb{R}^n_{++}$ und $M^a \in \mathbb{R}_{++}$ die Gleichung

$$P(p^a,p^b;M^a) = \frac{\rho_{b,a}(M^a)}{M^a}$$

Beweis: Aufgrund von Theorem 9.1 wissen wir bereits, daß die Beziehung

$$x\bar{R}^* y \iff u(x) \geq u(y)$$

Gültigkeit besitzt. Wir betrachten nun das Güterbündel $x^a = h(p^a,M^a)$. Dann gilt für alle $y \in B(p^a,M^a)$ die Beziehung

$u(x^a) \geqq u(y)$. Ferner trifft auf $x^b=h(p^b,\rho_{b,a}(M^a))$ gemäß Theorem 9.3 die Bedingung $u(x^b) = u(x^a)$ zu, und es gilt offensichtlich auch, daß

$$\rho_{b,a}(M^a) = \min_{x\in\mathbb{R}^n_+} p^b\cdot x \wedge u(x) = u(x^a).$$

Hieraus folgt dann mit Definition 9.9 das Ergebnis:

$$\frac{\rho_{b,a}(M^a)}{M^a} = P(p^a,p^b;M^a).$$

Damit ist der Preisindex in allen Preissituationen berechenbar.

q.e.d.

Zum Abschluß unserer Untersuchung der Theorie der Revealed Preference werden noch einige Ergebnisse präsentiert, auf deren Beweise wir weitgehend verzichten wollen. Es soll jedoch an entsprechender Stelle auf die dazu vorhandene Literatur verwiesen werden.

9.8 Abschließende Bemerkungen zur Theorie der Revealed Preference

Die vorangehenden Überlegungen haben gezeigt, daß die beiden Funktionen $\rho_{b,a}$ und $\rho'_{b,a}$ eine zentrale Rolle für die Existenz einer die gegebene Nachfragefunktion generierenden Nutzenfunktion spielen.
In Anmerkung 9.1 wurde darauf hingewiesen, daß aus den Axiomen DI-DV die Stetigkeit von $\rho_{b,a}$ und damit auch von $\rho'_{b,a}$ folgt. Wir wollen nun zeigen, daß diese Eigenschaft für $\rho'_{b,a}$ auch unter anderen Bedingungen bewiesen werden kann.

Theorem 9.14

Sei $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ eine bezüglich M stetige Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_+$, die die Budgetgleichung: $(\forall(p,M)\in\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+)[p\cdot h(p,M)=M]$, das Starke Axiom (DV): $xR^*y \Rightarrow \neg(yR^*x)$

und die Beziehung $\rho'_{b,a}(M^a) \leqq \rho_{b,a}(M^a)$, $\forall M^a>0$, erfüllt. Ferner sei für jedes $x^o \in \mathbb{R}^n_+$ und jedes $p^c \in \mathbb{R}^n_{++}$ die Menge $\{x \mid x=h(p^c,M) \wedge x^o \bar{R}^* h(p^c,M)\ ,\forall M \geqq 0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n_+$.

Dann ist die Funktion $\rho'_{b,a}$ stetig für alle $M^a>0$.

Beweis: Offenbar ist für beliebiges $(p^a,M^a) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ die Menge $\{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a)\}$ nicht leer und durch $M=0$ nach unten beschränkt, so daß $\rho'_{b,a}(M^a)$ für alle $M^a>0$ existiert.

Um die Stetigkeit von $\rho'_{b,a}$ zu beweisen, sei $\langle M^{ak}\rangle$ eine beliebige streng monoton fallende Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} M^{ak}=M^a$. Dann ist die Folge $\langle\rho'_{b,a}(M^{ak})\rangle$ ebenfalls monoton fallend und durch $\rho'_{b,a}(M^a)$ nach unten beschränkt, so daß $\lim\limits_{M^{ak}\to M^a} \rho'_{b,a}(M^{ak}) \geqq \rho'_{b,a}(M^a)$.

Annahme: $M^* := \lim\limits_{M^{ak}\to M^a} \rho'_{b,a}(M^{ak}) > \rho'_{b,a}(M^a)$.

Dann gibt es ein M^o mit

(1) $\rho'_{b,a}(M^a)<M^o<M^*$, und $h(p^b,M^o)R^*h(p^a,M^a)$. Wie aus dem Beweis zu Theorem 9.1 (e) hervorgeht, reichen die Voraussetzungen von Theorem 9.14 aus, um nachzuweisen, daß $\{x \mid x\in\mathbb{R}^n_+ \wedge h(p^b,M^o)R^*x\}$ eine in $\mathbb{R}^n_+$ offene Menge ist. Deshalb gibt es ein $\tilde{N}$, so daß für alle $k>\tilde{N}$ die Beziehung $h(p^b,M^o)R^*h(p^a,M^{ak})$ zutrifft. Das aber ist ein Widerspruch zu (1) und der Definition von M^*, so daß die Annahme zu verwerfen ist.

Sei nun $\langle M^{ak}\rangle$ eine beliebige streng monoton steigende Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} M^{ak}=M^a$. Da für jedes $\varepsilon>0$,

$$\{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a)\} \subseteqq \{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a-\varepsilon)\}$$

folgt hieraus, daß

$$\inf \{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a)\} \geqq \inf \{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^a-\varepsilon)\}.$$

Also gilt auch

(2) $\rho'_{b,a}(M^a) \geqq \rho'_{b,a}(M^{ak})$.

Die Folge $\langle \rho'_{b,a}(M^{a_k}) \rangle$ ist ebenfalls monoton wachsend, und wir können mit (2) auf

$$\tilde{M} := \lim_{k\to\infty} \rho'_{b,a}(M^{a_k}) \leq \rho'_{b,a}(M^a)$$

schließen.

Annahme: $\tilde{M} < \rho'_{b,a}(M^a)$.

Dann gibt es ein $\bar{\bar{M}}$ derart, daß

(3) $\tilde{M} < \bar{\bar{M}} < \rho'_{b,a}(M^a)$.

Also gilt $\bar{\bar{M}} > \lim\limits_{M^{a_k}\to M^a} \inf \{M \mid h(p^b,M)R^*h(p^a,M^{a_k})\}$.

Hieraus folgt für alle k: $\bar{\bar{M}} > \rho'_{b,a}(M^{a_k})$, woraus sich $h(p^b,\bar{M})R^*h(p^a,M^{a_k})$ ergibt. Mit dem Starken Axiom können wir dann auf $\neg(h(p^a,M^{a_k})R^*h(p^b,\bar{M}))$ bzw. $h(p^b,\bar{M})\bar{R}^*h(p^a,M^{a_k})$ schließen. Da h stetig bezüglich M ist , folgt $\lim\limits_{k\to\infty} h(p^a,M^{a_k})=h(p^a,M^a)$, so daß nach Voraussetzung dann auch $h(p^b,\bar{M})R^*h(p^a,M^a)$ gilt. Dieses Resultat führt schließlich auf $\bar{M} \geqq \rho_{b,a}(M^a)$ und damit auf $\bar{M} < \rho'_{b,a}(M^a) \leq \rho_{b,a}(M^a) \leq \bar{M}$. Infolgedessen ist die Annahme zu verwerfen.

q.e.d.

Anmerkung 9.4

Da mit dem Starken Axiom auf $\rho_{b,a}(M^a) \leq \rho'_{b,a}(M^a)$ geschlossen werden kann, folgt aus den Voraussetzungen des obigen Satzes auch die Stetigkeit von $\rho_{b,a}$.

Die im Theorem 9.14 verwandte Prämisse $\rho_{b,a}'(M^a) \leq \rho_{b,a}(M^a)$ spielt, wie von Moeseke (1969 S.98) als erster erkannte, für die Äquivalenz des Starken und Schwachen Axioms eine wichtige Rolle. Die Voraussetzungen von von Moeseke wurden später von Sakai (1974) etwas abgeschwächt. Betrachtet man jedoch von Moesekes Beweis genauer, so sieht man sehr leicht, daß er auch unter den schwächeren Bedingungen durchführbar ist. Diesen von Sakai und von Moeseke gefundenen Satz wiederholt unser nächstes Theorem. Auf einen Beweis desselben wie auch der folgenden beiden Theoreme wollen wir jedoch hier verzichten und verweisen auf die bereits dafür vorhandene Literatur.

Theorem 9.15

Sei $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion, die der Budgetgleichung genügt und deren Wertebereich eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n_+$ ist.

Dann und nur dann erfüllt h auch das Starke Axiom (DV), wenn h das Schwache Axiom (WA") und die Bedingung

$(\forall p^a, p^b \in \mathbb{R}^n_{++})(\forall M^a > 0)\ [\rho_{b,a}(M^a) \leq \rho'_{b,a}(M^a)]$ erfüllt.

Der folgende Zusammenhang zwischen dem Starken und dem Schwachen Axiom wurde von Uzawa (1971, S.21-22) gefunden. Dabei ist zu beachten, daß durch unsere Änderung der Axiome DI-DIV, die in Uzawas Beweis vorhandenen Lücken geschlossen werden können.

Theorem 9.16

Ist $h:\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion, die die Prämissen DI-DIV erfüllt, so trifft das Starke Axiom (DV) nur dann auf sie zu, wenn sie dem Schwachen Axiom (WA") und der Bedingung (R): <u>die Funktion $\rho_{b,a}$ ist streng monoton wachsend</u>, genügt.

Den Beweis für $(R) \wedge (WA") \Rightarrow (DV)$ können wir bei Uzawa nachlesen.

Beweis für $(DV) \Rightarrow (R) \wedge (WA")$: Angenommen es gäbe ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\rho_{b,a}(M^a+\varepsilon) \not> \rho_{b,a}(M^a)$ gilt.

Da aufgrund der Transitivität von R^* auf

$$\sup\{M \mid h(p^a, M^a+\varepsilon) R^* h(p^b, M)\} \geq \sup\{M \mid h(p^a, M^a) R^* h(p^b, M)\}$$

geschlossen werden kann, gilt $\rho_{b,a}(M^a+\varepsilon) \geq \rho_{b,a}(M^a)$, so daß sich hieraus mit unserer Annahme $\rho_{b,a}(M^a+\varepsilon) = \rho_{b,a}(M^a)$ ergibt. Wie wir bereits wissen, gilt

(1) $h(p^a,M^a)\ I^*\ h(p^b,\rho_{b,a}(M^a))$

(2) $h(p^a,M^a+\varepsilon)\ I^*\ h(p^b,\rho_{b,a}(M^a+\varepsilon))$

so daß wir hiervon mit Theorem 9.1 (g) auf $h(p^a,M^a)\ I^* h(p^a,M^a+\varepsilon)$ schließen können. Das aber ist ein Widerspruch zu $h(p^a,M^a+\varepsilon)\ Rh(p^a,M^a)$.

q.e.d.

Ursprünglich hatte man vermutet, daß das Schwache Axiom ausreichen würde, um eine transitive und vollständige Präferenzrelation, die die gegebene Nachfragefunktion h rationalisiert, auf dem Güterraum zu erzeugen. Nachdem Houthakker das Starke Axiom in die Theorie der Revealed Preference eingeführt hatte, versuchte man unter der Voraussetzung anderer Hypothesen, wie z.B. der Budgetgleichung, die Äquivalenz dieser beiden Axiome nachzuweisen. Es gelang schließlich Rose (1958) diese für den Güterraum $\mathbb{R}^2_+$ zu zeigen. Im Jahre 1960 veröffentlichte jedoch Gale eine Arbeit, in der eindrucksvoll nachgewiesen wird, daß die beiden genannten Axiome nicht allgemein äquivalent sind. Das von Gale präsentierte Gegenbeispiel läßt erkennen, daß das Schwache Axiom im Gegensatz zum Starken Axiom nicht zu der Existenz einer Nutzenfunktion, die die gegebene Nachfragefunktion generiert, führen muß, wenn es zu den anderen üblichen Hypothesen hinzugenommen wird. Kihlstrom, Mas-Colell und Sonnenschein untersuchten die von Gale als Gegenbeispiel genannte Nachfragefunktion und erkannten, daß für diese die Slutsky-Hicks-Matrix wohl negativ semidefinit aber nicht symmetrisch ist. Aufgrund dieser Erkenntnis gelang es ihnen, eine Beziehung zwischen den beiden genannten Eigenschaften der Slutsky-Hicks-Matrix und dem Schwachen und Starken Axiom herzustellen. In dem folgenden Satz, den wir bereits zum Beweis von Theorem 9.12 herangezogen haben, wiederholen wir das von Kihlstrom, Mas-Colell und Sonnenschein gewonnene Ergebnis.

Theorem 9.17

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ eine Nachfragefunktion, mit den Eigenschaften:

(a) h ist stetig differenzierbar,

(b) $(\forall\lambda>0)$ $[h(p,M)=h(\lambda p,\lambda M)]$,

(c) $(\forall(p,M)\in\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ $[p\cdot h(p,M)=M]$.

Dann gilt:
1) Die zu h gehörende Slutsky-Hicks-Matrix ist genau dann negativ semidefinit und symmetrisch, wenn h das Starke Axiom (DV) erfüllt.
2) Erfüllt h das Schwache Axiom, so ist die zu h gehörende Slutsky-Hicks-Matrix negativ semidefinit aber nicht notwendigerweise auch symmetrisch.

Auf den umfangreichen Beweis dieses Theorems wollen wir hier verzichten.

In diesem Paragraphen hat sich gezeigt, daß wir anstelle des klassischen Zugangs zur Nachfragetheorie, Maximierung einer gegebenen Nutzenfunktion, auch den Weg über eine gegebene Nachfragefunktion wählen können. Diese Ansätze stehen gleichberechtigt nebeneinander, da sie beide zu den einschlägigen Gesetzen der Nachfragetheorie führen.
Neben der Theorie der Revealed Preference gibt es jedoch noch andere Modelle, die nicht von einer Nutzenfunktion des Marktteilnehmers ausgehen. Auf diese wollen wir im nächsten Paragraphen zu sprechen kommen.

§ 10 Moderne rationale Nachfragemodelle

10.1 Das Nachfragemodell von McKenzie

Die grundlegende Idee der Theorie der Revealed Preference, ein Nachfragemodell ohne Verwendung der Nutzenfunktion zu konstruieren, griff McKenzie auf. Er betont diese Absicht auch in seinem Artikel "Demand Theory without a Utility Index", durch den Satz (vgl. McKenzie (1957, S.185)): "It is my purpose here to describe an approach to the theory of demand which dispenses with the utility index entirely". Aber da McKenzie von einer stetigen, transitiven und vollständigen Präferenzrelation ausgeht, kann schließlich auch in seinem Modell - wie in der Theorie der Revealed Preference - durch den Debreuschen Repräsentationssatz - eine Nutzenfunktion eingeführt werden.
McKenzie geht von einem in unserem Sinne rationalen Marktteilnehmer, der in Übereinstimmung mit seiner Präferenzrelation handelt, aus. Seinem Modell legt er die folgenden Prämissen zugrunde [1]:

(M^1): Die Alternativmenge X ist eine kompakte, nicht leere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

(M^2): Es gibt eine transitive, vollständige und stetige Relation $\succsim$ auf X [2].

(M^3): Für $S^1 := \{(p,M) \mid p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \wedge M \in \mathbb{R}_{++} \wedge (\exists x \in X)[px \leq M]\}$ existiert eine Nachfragekorrespondenz h: $S^1 \to 2^X$ derart, daß h rational bezüglich der vorgegebenen Relation $\succsim$ ist, d.h.

$$(\forall (p,M) \in S^1)[h(p,M) = \{y \mid y \in B(p,M)\ ^{3)} \wedge (\forall z \in B(p,M))[y \succsim z]\}]$$

---

1) Wir greifen hierbei auf die von Takayama präzisierte Darstellung des Nachfragemodells von McKenzie zurück (vgl. Takayama (1974, S. 235-249)).

2) Für die hier präsentierten Folgerungen aus den Axiomen (M1)-(M5)' hätte es auch genügt, zu fordern, daß $\succsim$ von oben halbstetig ist.

3) $y \in B(p,M) \Leftrightarrow (y \in X \wedge py \leq M)$

(M^4): h ist lokal nicht saturierbar, d.h.:

$$x\varepsilon h(p,M) \Rightarrow (\exists\gamma>0)(\forall\delta\varepsilon]0,\gamma[)(\exists x'\varepsilon U_\delta(x)\cap X)[x'\succ x]$$ [1)]

(M^5): X besitzt einen inneren Punkt $\bar{x}$.

Anstelle von M^5 verwendet McKenzie auch die Bedingung

$(M^5)'$: Sei $x\varepsilon h(p,M)$. Dann gibt es $\varepsilon>0$ mit der Eigenschaft:

$$(\forall\delta\varepsilon]0,\varepsilon[)(\exists\tilde{x}\varepsilon U_\delta(x)\cap X)[p\tilde{x}<px].$$

Wird zusätzlich verlangt, daß die Relation $\succsim$ strikt konvex ist, d.h., für beliebiges $x,x'\varepsilon X$ mit $x\neq x'$ und $x(t)=tx+(1-t)x'$, für $t\varepsilon]0,1[$ gilt:

$$x\succsim x' \Rightarrow x(t)\succ x',$$

so folgt, daß h eine Funktion ist. Diese Behauptung wird im nächsten Lemma bewiesen.

Lemma 10.1

Vorausgesetzt seien die Bedingungen (M^1)-(M^3) und X sei eine konvexe Menge. Ist ferner die Relation $\succsim$ strikt konvex, so ist h eine Funktion.

Beweis:

Seien $x',x''\varepsilon h(p,M)$, dann gilt:

$$(\forall z\varepsilon X)[pz\leqq M \Rightarrow x'\succsim z] \quad ,$$

$$(\forall z\varepsilon X)[pz\leqq M \Rightarrow x''\succsim z].$$

Angenommen $x'\neq x''$. Hieraus ergibt sich für $x^0=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}x''$ die Beziehung $x^0\succ x'$. Aber da x^0 ebenfalls ein Element von B(p,M) und h rational bezüglich der Relation $\succsim$ ist, ergibt sich hieraus ein Widerspruch zu $x^0\succ x'$. Also besteht Gleichheit zwischen x' und x''.

q.e.d.

---

1) $x'\succ x \;:\Leftrightarrow\; x'\succsim x \wedge \neg(x\succsim x')$

Lemma 10.2

Werden die Hypothesen (M^1) und (M^3) vorausgesetzt und nimmt man ferner an, daß $\succsim$ strikt konvex, vollständig und von oben halbstetig auf der konvexen Menge X ist, so ist die Relation $\succsim$ auch transitiv, wenn $\succ$ transitiv ist.

Beweis (indirekt):
Angenommen, es gäbe $x^1, x^2, x^3 \in X$ mit:

(1) $\quad x^1 \succsim x^2 \ \wedge \ x^2 \succsim x^3 \ \wedge \ \neg(x^1 \succsim x^3)$.

Da aus $\neg(x^1 \succsim x^3)$ auch $x^1 \neq x^3$ und $x^3 \succsim x^1$ folgt, führt die strikte Konvexität von $\succsim$ auf:

(2) $\quad (\forall t \in]0,1[)[tx^3+(1-t)x^1 \succ x^1]$.

Wegen (1) gilt auch $x^3 \succ x^1$, so daß ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft

(3) $\quad (\forall x \in U_\varepsilon(x^1) \cap X)[x^3 \succ x]$

existiert. Da X konvex ist, folgt mit (3):

$$(\exists t^o \in]0,1[)[x^3 \succ t^o x^3 + (1-t^o)x^1]$$

Dies führt zusammen mit (2) auf $x^3 \succ x^1$, im Widerspruch zu (1). Also ist auch $\succsim$ transitiv.

Anmerkung 10.1

Die strikte Konvexität von $\succsim$ ist der Hauptgrund dafür, daß im vorausgehenden Lemma die Indifferenzrelation "$\sim$", welche durch

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ \neg(x \succ y) \ \wedge \ \neg(y \succ x), \quad \forall x,y \in X$$

definiert wird, transitiv ist.

McKenzies Prämissen führen wie die Hypothesen der Theorie der Revealed Preference zu den beiden zentralen Forderungen in der Nachfragetheorie, der negativen Semidefinitheit und Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix. Um diese Eigenschaften zu beweisen, ist es erforderlich, eine Funktion, die mit $\rho_{b,a}$ nahe verwandt ist, einzuführen.

Definition 10.1

Sei $\succsim$ eine Relation über X, die die Bedingung (M^2) erfüllt. C_y sei die Menge $\{z \mid z\varepsilon X \wedge z\succsim y\}$ für $y\varepsilon X$. Ferner erfülle X die Bedingung (M^1).
Dann sei M_y: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Funktionsgleichung

$$M_y(p) = \min_{z\varepsilon C_y} p\cdot z.$$

Anmerkung 10.2

Da C_y kompakt ist, existiert stets ein $\hat{z}\varepsilon C_y$, welches $p\cdot z$ minimiert. Die Funktion M_y heißt die "minimale Ausgabenfunktion".

Definition 10.2

Unter der Voraussetzung von (M^1) und (M^5)' sei f^y: $\mathbb{R}^n \rightarrow X$ eine Funktion mit $f^y(p) := f(p,M_y(p))$, die in der Umgebung von (p,M), in der (M^5)' Gültigkeit besitzt, definiert sein soll.

Die oben definierte Funktion heißt auch "kompensierte Nachfragefunktion". Sie gibt beim Preisniveau p das Güterbündel an, welches zu y indifferent ist. Betrachten wir vergleichsweise in der Theorie der Revealed Preference die Funktion f mit $f(p^b) := h(p^b,\rho_{b,a}(M^a))$, so sehen wir unmittelbar, daß sie die kompensierte Nachfragefunktion in dieser Theorie darstellt.
Aus der Definition 10.2 ergibt sich auch die Äquivalenz:

$$y = h(p,M) \Leftrightarrow y = f^y(p).$$

Wir beweisen nun zuerst die Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix (vgl. Takayama (1974, S.246)).

Theorem 10.1

Sei h: $S^1 \rightarrow 2^X$ eine differenzierbare Nachfragefunktion, die die Bedingungen (M^1)-(M^4) und (M^5)' erfüllt. Ferner sei f^y differenzierbar und M_y zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt an der Stelle $y=f^y(p)$:

(i) $$\frac{\partial M_y(p)}{\partial p_i} = f_i^y(p)\ , \qquad \frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 M_y(p)}{\partial p_i\,\partial p_j}$$ [1],

(ii) $$\frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_j^y(p)}{\partial p_i}$$ und

(iii) Die Slutsky-Hicks-Matrix ist symmetrisch.

Beweis:
Aus (M^4) folgt unmittelbar

$$M_y(p) = p\cdot y,$$

denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, so müßte laut Definition $M_y(p)<py$ gelten. Dann aber gibt es nach (M^4) ein x'' mit $p\cdot x''<M \wedge x''\succ y$. Infolgedessen gilt $x''\varepsilon h(p,M)$. Das ist aber ein Widerspruch, da bereits $y=h(p,M)$ zutrifft und h Funktion ist. Daher folgt

(1) $$M_y(p) = p\cdot y = p\cdot f^y(p) = p\cdot h(p,M).$$

Aufgrunddessen erhalten wir:

(2) $$\frac{\partial M_y(p)}{\partial p_i} = \frac{\partial(p\cdot f^y(p))}{\partial p_i} = f_i^y(p) + p\cdot\frac{\partial f^y(p)}{\partial p_i}\ .$$

Wir zeigen nun

$$\frac{p\cdot\partial f^y(p)}{\partial p_i} = 0\ .$$

Deshalb betrachten wir in C_y ein $z'=f^y(p')$, das hinreichend nahe bei y liegt, damit $(M^5)'$ angewendet werden kann. Damit erhalten wir $py\leqq pz'$ bzw. $p\cdot f^y(p)\leqq p\cdot f^y(p')$. Diese Ungleichung gilt für alle (p',z'), die hinreichend nahe bei (p,y) liegen, so daß für festes p der Ausdruck $p\cdot f^y(p')$ bezüglich p' in p minimiert wird.

---

1) $f_k^y(p)$ bezeichnet die k-te Komponente von $f^y(p)$.

Also muß $p \cdot \frac{\partial f^y(p')}{\partial p'_j} = 0$ für $p'=p$ und $j=1,\ldots,n$

gelten.

Deshalb folgt aus (2)

$$\frac{\partial M_y(p)}{\partial p_i} = f_i^y(p) \ .$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 M_y(p)}{\partial p_i \partial p_j} \ ,$$

womit (1) bewiesen ist.

Ist nun M_y zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus (3):

$$(4) \qquad \frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_j^y(p)}{\partial p_i} \ ,$$

womit (ii) gezeigt ist.

Wir beweisen nun noch die Gleichung

$$\frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial p_j} + f_j^y(p) \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial M} \ .$$

Wie wir bereits am Anfang dieses Beweises nachgewiesen haben, gilt für $y=h(p,M)$:

$$p \cdot y = M = M_y(p).$$

Infolgedessen erhalten wir mit (i)

$$(5) \qquad \frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,M_y(p))}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial p_j} + \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial M} \cdot \frac{\partial M_y(p)}{\partial p_j}$$

$$= \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial p_j} + f_j^y(p) \frac{\partial h_i(p,M)}{\partial M} \ .$$

Hieraus folgt mit (ii) und der Definition von f^y sofort die Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix.

q.e.d.

Die Ausdrücke $\frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j}$ werden nach Hicks auch Substitutionsterme genannt, da durch diese das Güterbündel y' bestimmt wird, das dem Handlungsträger nach einer Preisänderung den gleichen Nutzen wie y, welches er vor dieser Änderung erwerben konnte, bringt. Dabei gibt $\frac{\partial f_i^y(p)}{\partial p_j}$ die Änderung der Nachfrage nach dem Gut i an, wenn der Preis von p_j fällt oder steigt.

Um zu zeigen, daß die Slutsky-Hicks-Matrix negativ semidefinit ist, beweisen wir zunächst, daß die Funktion M_y für alle $p>0$ konkav ist (vgl. Takayama (1974, S.246)).

Lemma 10.4

Sei $h: S^1 \to 2^X$ eine Nachfragefunktion, die die Bedingungen (M^1)-(M^4) und $(M^5)'$ erfüllt. Dann ist M_y auf IR^n_{++} eine konkave Funktion.

Beweis:
Seien $p^a, p^b \varepsilon \mathrm{IR}^n_{++}$ und $p^{t^o} = t^o p^a + (1-t^o)p^b$, wobei $t^o \varepsilon [0,1]$. Definitionsgemäß gilt $M_y(p^{t^o}) \leqq p^{t^o} z$ für alle $z \varepsilon C_y$. Da C_y kompakt ist, gibt es ein $\bar{z} \varepsilon C_y$, welches den Term $p^{t^o} z$ für $z \varepsilon C_y$ minimiert. Damit gilt:

$$M_y(p^{t^o}) \geqq p^{t^o}\bar{z} - \varepsilon \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Infolgedessen erhalten wir:

$$(\forall \varepsilon > 0)[M_y(p^{t^o}) \geqq t^o p^a \bar{z} + (1-t^o) p^b \bar{z} - \varepsilon].$$

Da $\bar{z} \varepsilon C_y$, gilt auch $p^a \bar{z} \geqq M_y(p^a)$ und $p^b \bar{z} \geqq M_y(p^b)$. Hieraus folgt:

$$(\forall \varepsilon > 0)[M_y(p^{t^o}) \geqq t^o M_y(p^b) + (1-t^o) M_y(p^a) - \varepsilon].$$

Dieses Ergebnis führt unmittelbar auf

$$(\forall t \varepsilon [0,1])[M_y(p^t) \geqq t M_y(p^b) + (1-t) M_y(p^a)].$$

Theorem 10.2

Sei $h: S^1 \to 2^X$ eine differenzierbare Nachfragefunktion, die die

Bedingungen (M^1)-(M^4) und $(M^5)'$ erfüllt. Ferner sei f^y stetig differenzierbar und M_y auf $\mathbb{R}^n_{++}$ definiert. Dann ist die Slutsky-Hicks-Matrix negativ semidefinit für alle $p>0$.

Beweis:
Nach Theorem 10.1 (i) gilt

$$\frac{\partial f^y_i(p)}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 M_y(p)}{\partial p_i \partial p_j} \quad ,$$

und nach Lemma 10.3 ist M_y konkav. Aus diesem Grunde ist die Hesse-Matrix von M_y für alle $p>0$ negativ semidefinit, womit sich unmittelbar

$$\sum_{i,j} \frac{\partial f^y_i(p)}{\partial p_j}\, dp_i dp_j \leqq 0$$

ergibt. Hieraus kann aber mit Gleichung (5) von Theorem 10.1 (iii) sofort auf die negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix geschlossen werden.

q.e.d.

Die obigen Beweise wurden in Anlehnung an McKenzie bzw. Takayama geführt. Die Symmetrie und negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix ergibt sich jedoch auch in dem Modell von McKenzie als Folgerung aus dem Satz von Kihlstrom, Mas-Colell und Sonnenschein (vgl. Theorem 9.16). Um dies zu zeigen, beweisen wir den folgenden Satz:

Theorem 10.3

Sei $h: \mathbb{R}^{n+1}_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ eine stetig differenzierbare Nachfragefunktion, die die Bedingungen (M^1)-(M^4) und $(M^5)'$ erfüllt. Dann gilt:

(i) h erfüllt die Budgetgleichung.

(ii) h ist homogen vom Grade 0.

(iii) h erfüllt das Starke Axiom: $xR^*y \Rightarrow \neg(yR^*x)$

Beweis:
Zu (i): Für $z=h(p,M)$ gilt aufgrund von (M^3) $pz \leqq M$.
Nehmen wir $pz<M$ an, so gibt es nach (M^4) ein $x' \in X$ derart, daß

$x'\succ x$ und $px'<M$. Das aber ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß h rational bezüglich der Relation $\succsim$ ist. Also gilt $pz=M$.

Zu (ii): Sei $z=h(p,M)$. Da h rational bezüglich $\succsim$ ist, gilt:

(1) $\quad z=h(p,M) \Leftrightarrow (\forall y\in X)[py\leqq M \Rightarrow z\succsim y]$.

Aber da für $t\in \mathbb{R}_{++}$

$$py\leqq M \Leftrightarrow tpy\leqq tM$$

gilt, impliziert dieses Ergebnis zusammen mit (1) und (M^3)

$$(\forall t\in \mathbb{R}_{++})[z=h(tp,tM)].$$

Zu (iii): Sei xR^*y erfüllt. Aus der Annahme, yR^*x gelte ebenfalls, folgt

$$yRx \vee (\exists x^1,\dots,x^k)[yRx^1 \wedge\dots\wedge x^kRx].$$

1. Fall: yRx. Hieraus folgt definitionsgemäß

$$y\neq x \wedge (\exists(p,M))[y=h(p,M) \wedge py\geqq px]$$

Gemäß (M^3) ergibt sich

(2) $\quad y\succ x$.

Von xR^*y führt aber (M^3) und die vorausgesetzte Transitivität von $\succsim$ zu $x\succsim y$. Dies aber ist ein Widerspruch zu (2).
2. Fall: Aus $yRx^1 \wedge\dots\wedge x^kRx$ folgt wie im ersten Fall

(3) $\quad y\succ x^1 \wedge\dots\wedge x^k\succ x$.

Da aber die Relation $\succsim$ transitiv und vollständig ist, führt das Resultat in (3) zu $y\succ x$. Aus xR^*y folgt jedoch $x\succsim y$, so daß wir einen Widerspruch erhalten. Damit ist das Starke Axiom erfüllt.

An Theorem 10.3 schließt sich sofort aufgrund von Theorem 9.16 folgendes Ergebnis an:

Korollar 10.1

Unter den Annahmen von Theorem 10.3 ist die Slutsky-Hicks-Matrix der Funktion h für alle $(p,M)\in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ negativ semidefinit und symmetrisch.

Anmerkung 10.3

Wir haben in Theorem 10.3 zwar nicht auf die Funktionen f^y und M_y zurückgegriffen, aber da aufgrund der Voraussetzungen dieses Satzes für $y=h(p,M)$ auch $y=f^y(p)$ und $py=M=M_y(p)$ gilt, können wir im obigen Beweis auch $f^y(p)$ und $M_y(p)$ verwenden. Werden außerdem die notwendigen Differenzierbarkeitsbedingungen gefordert, so gelangen wir auch zu der Gleichung (5) von Theorem 10.1.

10.2 Die Integrabilitätstheorie von Samuelson, Hurwicz und Uzawa

Wie die vorangegangenen Ergebnisse uns gezeigt haben, kann sowohl in dem Nachfragemodell von McKenzie als auch in der Theorie der Revealed Preference die Symmetrie und die negative Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix aus den Hypothesen dieser Modelle abgeleitet werden. Das gleiche gilt auch, wenn eine Nutzenfunktion unter der Nebenbedingung, daß die Budgetgleichung erfüllt ist, maximiert wird (vgl. Hicks (1939) oder Samuelson (1947)). Samuelson gibt in seinem Buch "Foundation of Economic Analysis" als erster auch eine Antwort auf die umgekehrte Frage:
Kann von der Symmetrie und negativen Semidefinitheit der Slutsky-Hicks-Matrix einer Nachfragefunktion h auf die Existenz eines integrierbaren Präferenzfeldes geschlossen werden?
In seinem Artikel "The Problem of Integrability in Utility Theory", der 1950 erschienen ist, erläutert Samuelson diese Frage genauer. Dort versteht man unter Integrierbarkeit die Existenz eines Systems von Indifferenzlinien auf der Menge der Alternativen X, bzw. eine Zerlegung von X in ein System von Indifferenzklassen, welche durch das Nachfrageverhalten des Marktteilnehmers erzeugt werden. Diese Grundidee der Integrabilitätstheorie veranschaulichen auch die beiden folgenden Abbildungen:

Abb. 3

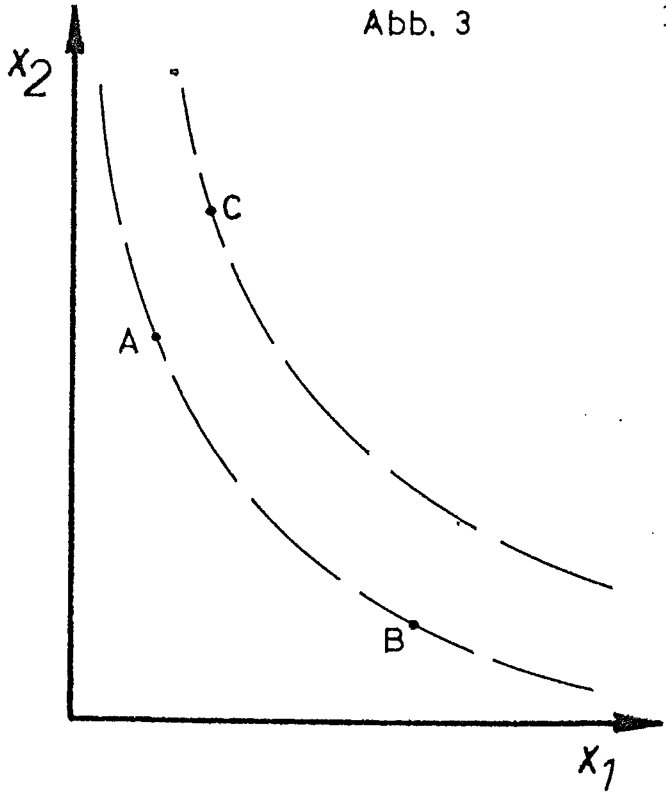
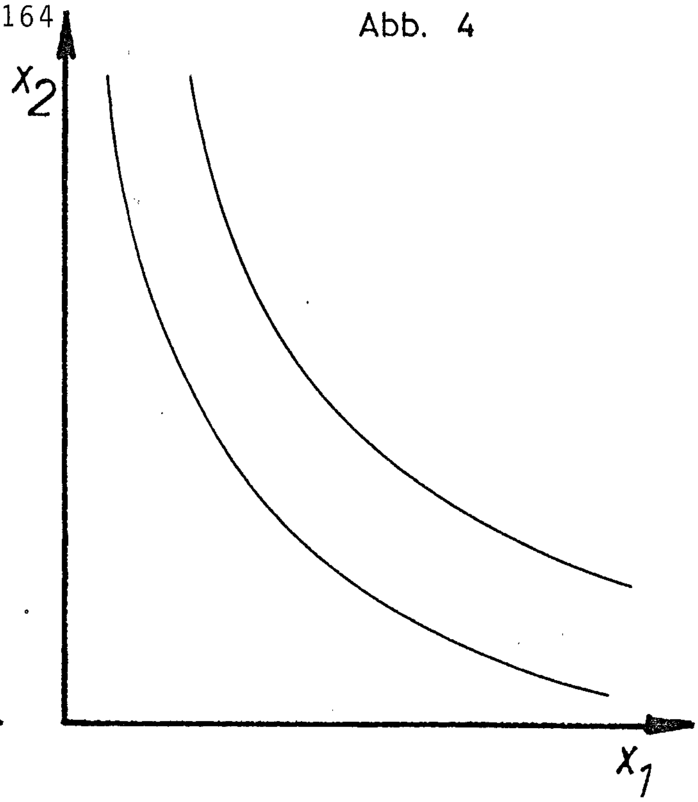


Abb. 4



In Abbildung 3 wird beispielsweise in dem Punkte x^a das Preisverhältnis ($-p_1^a/p_2^a$) bestimmt, in dem ein rational handelnder Marktteilnehmer das Güterbündel x^a wählt. In x^a wird dann ein Linienelement mit der Steigung $dx_2/dx_1 = -p_1^a/p_2^a$ eingetragen. Entsprechend wird in den beiden anderen Situationen, in denen das Individuum beobachtet wird, verfahren. Wir gelangen auf diese Weise zu einem Richtungsfeld, wie wir es aus der Theorie der Differentialgleichungen kennen. Es stellt sich nun die Frage, ob es zu diesem Richtungsfeld auch ein System von Integralkurven wie in Abbildung 4 gibt, welches mit den Indifferenzkurven des Marktteilnehmers übereinstimmt. Hurwicz hat darauf hingewiesen, daß mathematische Integrierbarkeit nicht gleichzeitig ökonomische Integrierbarkeit bedeutet, denn letzteres bedeutet, daß die Lösungskurven des obigen Problems auch gleichzeitig Indifferenzkurven sind. Dies ist jedoch gewährleistet, wenn die Slutsky-Hicks-Matrix einer gegebenen Nachfragefunktion negativ-semidefinit ist (vgl. Hurwicz (1971, S.177)).

Die von Samuelson vorgeschlagene Methode zur Lösung des oben beschriebenen Integrierbarkeitsproblems wurde von Hurwicz und Uzawa (1971) übernommen, weitergeführt und von allen Unklarheiten und Lücken bereinigt. Dadurch steht uns ein weiteres rationales Nachfragemodell zu Verfügung, in welchem ebenfalls die Existenz einer Nutzenfunktion und die Gültigkeit des Starken

Axioms garantiert wird.
Dieses Nachfragemodell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa wollen wir nun untersuchen und den bereits vorhandenen Resultaten weitere hinzufügen.
Hurwicz und Uzawa gehen von folgenden Hypothesen aus:

(S1): $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $x=(h_1(p,M),\ldots,h_n(p,M))=h(p,M)$, ist eine Nachfragefunktion, die das Verhalten eines Individuums beschreibt.

(S2): $(\forall(p,M)\in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+)[p\cdot h(p,M)=M]$,

(S3): Die Funktionen $h_i: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $i=1,\ldots,n$, besitzen ein Differential auf $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$ [1].

(S4): Für alle $a',a''\in\mathbb{R}_{++}$ mit $0<a'<a''$ gibt es ein $K_{a',a''}$ mit:

$$(\forall i\leqq n)(\forall(p,M)\in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+)(\forall j\leqq n)[a'\leqq p_j\leqq a'' \Rightarrow \left|\frac{\partial h^i(p,M)}{\partial M}\right| \leqq K_{a',a''}]$$

(S5): Symmetrie der Slutsky-Hicks-Matrix, d.h.

$$S(p,M) = S'(p,M)$$

(S6): Negative Semidefinitheit

$$(\forall v\in\mathbb{R}^n)(\forall(p,M)\in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+)[v'S(p,M)v \leqq 0].$$

Auf der Grundlage dieser Axiome stellt sich nun die Frage nach der Existenz einer Nutzenfunktion, die die gegebene Nachfragefunktion generiert. Hurwicz und Uzawa lösen dieses Problem zunächst rein formal, indem sie zeigen, daß unter den Bedingungen (S1),(S3),(S4) und (S5) eine Lösung $\mu(p;p^*,M^*)$ des partiellen Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial \tilde{M}'(p)}{\partial p_i} = h_i(p,\tilde{M}')\ , \quad i\leqq n,$$

für jede Anfangsbedingung (p^*,M^*) existiert. Es erweist sich anschließend, daß μ stets das Einkommen angibt, das erforderlich ist, um den Nutzen des Konsumenten konstant zu halten, wenn sich die Preise aller oder einzelner Güter verändern. Die Funktion $\mu(p;p^*,M^*)$ heißt "Einkommens-Kompensierungsfunktion", da durch eine Einkommensvariation eine Preisänderung kompensiert wird; und sie ist vergleichbar mit der Funktion $M_y(p)$ aus der Definition 10.1.

1) Die Definition des Differentials finden wir bei Hurwicz und Uzawa (1971, S.117).

Es gilt daher das folgende Lemma, auf dessen Beweis wir hier verzichten (vgl. Hurwicz und Uzawa (1971, S.124)):

Lemma 10.5

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion, die die Bedingungen (S1),(S3),(S4) und (S5) erfüllt. Dann ist das partielle Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial \tilde{M}'(p)}{\partial p_i} = h_i(p,\tilde{M}') \quad , \; i \leqq n$$

bzw.

$$\frac{\partial \tilde{M}'(p)}{\partial p} = h(p,\tilde{M}')$$

eindeutig für jede Anfangsbedingung (p^*,M^*) durch die stetige Funktion $\mu(p;p^*,M^*)$ für alle $p>0$ lösbar und es gilt

(1) $\quad \mu(p^*;p^*,M^*) = M^*$

(2) $\quad \mu_i(p;p^*,M^*) = h_i(p,\mu(p;p^*,M^*))$.

Hierbei wird die Bedeutung von $\mu_i(p;p^*,M^*)$ festgelegt durch:

$$\mu_i(p;p^*,M^*) = \frac{\partial \mu(p;p^*,M^*)}{\partial p_i} \quad .$$

Außerdem ist für festes p $\mu(p;p^*,M^*)$ stetig bzgl. (p^*, M^*).

Mittels der Einkommens-Kompensationsfunktion können auch zwei Preiseinkommen-Situationen (p',M') und (p'',M'') miteinander verglichen werden, indem daß p^* festgehalten und jeweils $\mu(p^*;p',M')$ und $\mu(p^*;p'',M'')$ bestimmt wird. Gilt beispielsweise $\mu(p^*;p',M')>\mu(p^*;p'',M'')$, so hat die Ungleichung zum Inhalt, daß beim Preisniveau p^* das Einkommen, bei dem sich der Konsument ein Güterbündel leisten kann, das ihm den gleichen Nutzen bringt wie $h(p',M')$, größer sein muß als das Einkommen, das erforderlich ist, um ein Güterbündel zu erwerben, welches ihm den gleichen Nutzen wie $h(p'',M'')$ bereitet. Die Wahlsituation (p',M') gilt dann als besser als (p'',M''). Hurwicz und Uzawa konnten zeigen, daß die Einschätzung der Preis-Einkommens-Situation von seiten des Konsumenten unabhängig von der fest gewählten Preissituation p^* ist (vgl. S.125). Es läßt sich nämlich die folgende Aussage beweisen:

Lemma 10.6

Unter Voraussetzung der Axiome (S1),(S3),(S4) und (S5) gilt:

(a) $\mu(p^*;p',M') = \mu(p^*;p'',M'') \Rightarrow \mu(p;p',M') = \mu(p;p'',M'')$,

(b) $\mu(p^*;p',M') > \mu(p^*;p'',M'') \Rightarrow \mu(p;p',M') > \mu(p;p'',M'')$.

Aus dem nächsten Lemma geht hervor, daß die Funktion μ in gleicher Weise interpretiert werden kann wie die Funktion M_y.

Lemma 10.7

Erfüllt eine Aussagenfunktion h die Bedingungen (S1)-(S6), so gilt für beliebige Preis-Einkommen-Situationen (p^o,M^o) und (p^1,M^1):

$$x^o=h(p^o,M^o) \wedge x^1=h(p^1,M^1) \wedge M^1 \geqq \mu(p^1;p^o,M^o) \Rightarrow p^ox^1>p^ox^o.$$

Den Beweis zu diesem Lemma finden wir bei Hurwicz und Uzawa (S. 126-128).

Bemerkenswert ist, daß das Starke Axiom und damit auch das Schwache Axiom in diesem Modell aus den Hypothesen abgeleitet werden können. Hieraus folgt dann mit einem ähnlichen Beweis wie zu Theorem 9.1 (f), daß h rational bezüglich $\overline{R^*}$ ist.

Lemma 10.8

Sei h eine Nachfragefunktion, die den Bedingungen (S1)-(S6) genügt . Dann erfüllt h das Starke Axiom

$$xR^*y \Rightarrow \neg(yR^*x).$$

Beweis:
Vorgegeben seien $x^a=h(p^a,M^a)$ und $x^b=h(p^b,M^b)$ mit den Eigenschaften $x^a \neq x^b$ und $x^aR^*x^b$.
1. Fall: x^aRx^b.
Hieraus folgt definitionsgemäß $p^ax^a \geqq p^ax^b$, so daß wir mit Hilfe

von Lemma 10.5 und 10.7

$$M^b = \mu(p^b;p^b,M^b) < \mu(p^b;p^a,M^a)$$

erhalten. Aufgrund von Lemma 10.5 gilt aber auch

$$\mu(p^a;p^b,M^b) < \mu(p^a;p^a,M^a) = M^a.$$

Hieraus folgt mit Lemma 10.6 $p^b x^a > p^b x^b$, d.h. per definitionem $\neg(x^b R x^a)$.

2. Fall: $(\exists x^1,\dots,x^k)[x^a R x^1 \wedge\dots\wedge x^k R x^b]$.

Hieraus folgt

$$p^a x^a \geqq p^a x^1 \wedge\dots\wedge p^k x^k \geqq p^k x^b,$$

so daß wir mit Lemma 10.5 bzw. 10.7

$$\begin{aligned} M^1 &= \mu(p^1;p^1,M^1) < \mu(p^1;p^a,M^a) \ , \\ M^2 &= \mu(p^2;p^2,M^2) < \mu(p^2;p^1,M^1) \ , \\ &\vdots \\ M^b &= \mu(p^b;p^b,M^b) < \mu(p^b;p^k,M^k) \end{aligned}$$

erhalten. Mit Lemma 10.6 folgt hieraus

$$\begin{aligned} &\mu(p^a;p^1,M^1) < \mu(p^a;p^a,M^a) \ , \\ &\mu(p^a;p^2,M^2) < \mu(p^a;p^1,M^1) \ , \\ &\vdots \\ M^b = \ &\mu(p^a;p^b,M^b) < \mu(p^a;p^k,M^k) \end{aligned}$$

und damit

$$\mu(p^a;p^b,M^b) < \mu(p^a;p^a,M^a) = M^a \ .$$

Dieses Ergebnis führt mit Lemma 10.7 auf $p^b x^a > p^b x^b$ und schließlich auf $\neg(x^b R x^a)$. Damit haben wir zunächst das Ergebnis

(1) $\quad x^a R^* x^b \Rightarrow \neg(x^b R x^a)$

erhalten. Nehmen wir nun $x^b R^* x^a$ an, so folgt mit $x^a R^* x^k$ und der Transitivität von R^* die Beziehung $x^b R^* x^k$, so daß $\neg(x^k R x^b)$ gilt. Das aber ist ein Widerspruch zu $x^k R x^b$. Damit ist die Annahme zu verwerfen.

Korollar 10.2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 10.8 ist h rational bezüglich der Relation $\overline{R^*}$.

Der Beweis dieser Behauptung folgt mit Lemma 10.8 auf gleiche Weise wie zu Theorem 9.1 (f).

Der folgende Satz besagt, daß für jedes Güterbündel x der Wert von μ unabhängig davon ist, in welcher Preissituation x gewählt wird.

Lemma 10.9

Wird (S1)-(S6) vorausgesetzt, so gilt:

$$h(p^o,M^o) = h(p^1,M^1) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{R}^n_{++})[\mu(p;p^o,M^o) = \mu(p;p^1,M^1)]$$

Zum Beweis vgl. Hurwicz und Uzawa (1971. S.129).

Unter Verwendung dieser Funktion μ gelang es Hurwicz und Uzawa, eine Funktion zu finden, die sich als eine Nutzenfunktion , die h generiert, erweist.

Definition 10.3

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{+}$ eine Nachfragefunktion. Dann gelte für alle $p \in \mathbb{R}^n_{++}$

$$U_{p*}(x) := \mu(p*;p,M), \quad \text{wobei } x=h(p,M).$$

Anmerkung 10.4

Lemma 10.9 impliziert unmittelbar, daß für alle x aus dem Wertebereich von h der Funktionswert $U_{p*}(x)$ eindeutig bestimmt ist.

Die Erklärung der Funktion U_{p*} läßt nicht unmittelbar erkennen, daß U_p* die gegebene Nachfragefunktion generiert. Hurwicz und Uzawa gewannen jedoch das Ergebnis, daß dies zutrifft (vgl. S.131).

Theorem 10.4

Sei h eine Nachfragefunktion, die die Bedingungen (S1)-(S6) erfüllt. Ferner bezeichne D(h) den Wertebereich von h. Dann wird h von der Funktion U_{p*} generiert, d.h.

$$(\forall y \varepsilon D(h))[py \leqq M \wedge y \neq h(p,M) \Rightarrow U_{p*}(h(p,M)) > U_{p*}(y)].$$

Als direkte Konsequenz aus Lemma 10.6 läßt sich die folgende Aussage gewinnen:

Theorem 10.5

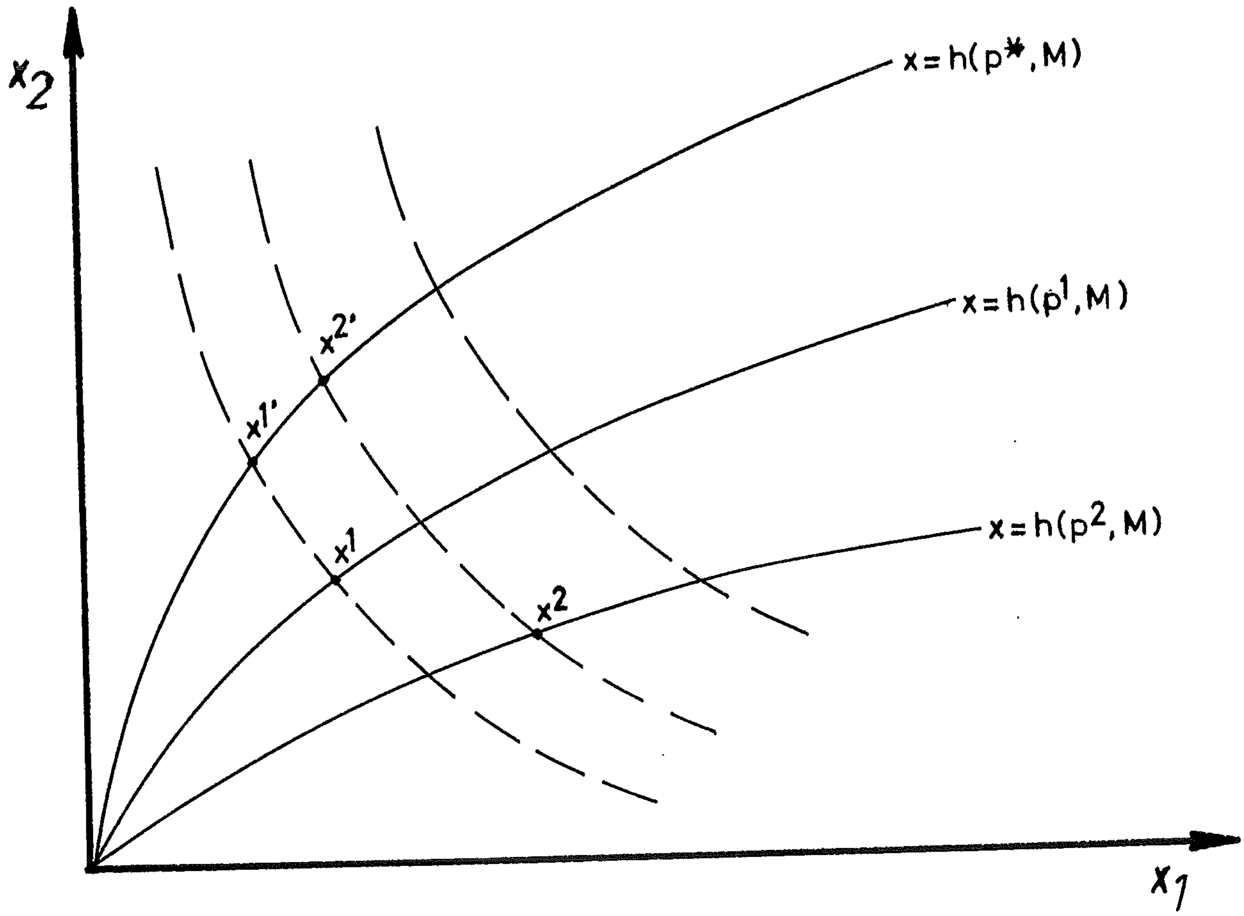
Unter Voraussetzung der Hypothesen von Theorem 10.4 gilt:

$$(\forall x,x' \varepsilon D(h))[U_{p^o}(x) > U_{p^o}(x') \Leftrightarrow U_{p*}(x) > U_{p*}(x')],$$

d.h. also, die Funktionen U_{p^o} und U_{p*} induzieren auf D(h) die gleiche Ordnung.

Veranschaulichen wir uns die Bedeutung von U_p durch die folgende graphische Darstellung!

Abb. 5



Um herauszufinden, welches der beiden Güterbündel x^1 und x^2 in Abbildung 5 von dem Marktteilnehmer höher bewertet wird, sucht man zu jedem das indifferente Güterbündel auf der Engelkurve $\{x | x \in IR^n \wedge x=h(p^*,M),\ \forall M \geqq 0\}$. Gilt $\mu(p^*;p^1,M^1) < \mu(p^*;p^2,M^2)$ bzw. $U_{p^*}(h(p^1,M^1)) < U_{p^*}(h(p^2,M^2))$, so besagt dies, daß in der Preissituation p^* zum Erwerb eines zu $x^2=h(p^2,M^2)$ äquivalenten Güterbündels $x^{2'}$ ein höheres Einkommen erforderlich ist als zum Kauf eines zu x^1 äquivalenten Güterbündels $x^{1'}$, und zwar gilt das unabhängig von dem gewählten p^*.

10.3 Stetigkeit der Funktion U_{p^*}

Wie in der Theorie der Revealed Preference stellt sich auch in dem oben beschriebenen Nachfragemodell das Problem, ob die Funktion U_{p^*} stetig ist. Diese Frage haben Hurwicz und Uzawa teilweise beantwortet, indem sie zeigten, wie aus den Bedingungen (S1)-(S6) Halbstetigkeit von oben der Funktion U_{p^*} folgt. Sie konnten ferner einige zusätzliche Bedingungen angeben, unter denen sich Stetigkeit ergibt (vgl. Hurwicz und Uzawa, S. 133-134). Es ist jedoch bisher nicht bekannt, ob die Voraussetzungen (S1) - (S6) auch hinreichend für die Stetigkeit von $U_p{*}$ sind. Ist dies nicht der Fall, so werden wir jetzt den Grund dafür kennenlernen und führen deshalb zunächst folgende Definition ein: die

Definition 10.4

Sei x^b Randpunkt einer konvexen Menge $S \subseteq IR^n$. Dann heißt x^b ein "unterer Randpunkt von S" genau dann, wenn:

$$(\forall x \in S)[x \leqq x^b \Rightarrow x=x^b].$$

Es wird sich zeigen, daß nur dann Unstetigkeitsstellen von $U_p{*}$ auftreten können, wenn für irgendein $\alpha > 0$ Randpunkte von $\{x | U_p{*}(x) \geqq \alpha\}$ auftreten, die nicht untere Randpunkte sind. Aus diesem Grunde werden wir nun das von U_{p^*} auf dem Wertebereich D(h) erzeugte Präferenzfeld untersuchen und betrachten deshalb die Relation $\succsim_0$, die festgelegt wird durch die

Definition 10.5

Seien $x, y \varepsilon D(h)$, dem Wertebereich von h. Dann gelte:

$$x \succ\cdot y \; :\Leftrightarrow \; U_{p^*}(x) > U_{p^*}(y)$$
$$x \sim y \; :\Leftrightarrow \; \neg(x \succ\cdot y) \wedge \neg(y \succ\cdot x)$$
$$x \succsim\cdot y \; :\Leftrightarrow \; x \succ\cdot y \vee x \sim y$$

Aufgrund unserer Bemerkung über die Stetigkeit von U_{p^*} und Theorem 10.5 erhalten wir sofort folgendes Ergebnis:

Lemma 10.10

Unter Voraussetzung von (S1)-(S6) ist die Relation $\succsim\cdot$ von oben halbstetig, transitiv, vollständig und unabhängig von der in der Definition 10.5 gewählten Preissituation p*.

Wie im nächsten Satz gezeigt wird, führen die Bedingungen (S1)-(S6) zu dem gewünschten Ergebnis, daß die von der Relation $\succsim\cdot$ erzeugten Indifferenzlinien strikt konvex zum Ursprung sind.

Definition 10.6

Eine Relation $Q \subseteq \Omega x \Omega$ heißt "strikt konvex zum Ursprung" genau dann, wenn:

$$(\forall x^1, x^2 \varepsilon \Omega)[x^1 Q x^2 \wedge x^1 \neq x^2 \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{R}^n_{++})[px^1 > px^2]].$$

Theorem 10.6

Wird (S1)-(S6) vorausgesetzt, so ist die Relation $\succsim\cdot$ strikt konvex zum Ursprung.

Beweis:
Für $x^1 \sim x^2$ und $x^1 \neq x^2$ wurde der Beweis schon von Hurwicz und Uzawa erbracht (vgl. S.131).
Sei nun $x^1 \succ\cdot x^2$ bzw. $U_{p^*}(x^1) > U_{p^*}(x^2)$. Hieraus folgt:

$$\mu(p^*; p^1, M^1) > \mu(p^*; p^2, M^2),$$

was mit Lemma 10.5 und Lemma 10.6 auf

$$M^1 = \mu(p^1;p^1,M^1) > \mu(p^1;p^2,M^2)$$

schließen läßt. Mit Lemma 10.7 gewinnen wir hieraus das Ergebnis

$$p^2x^1 > p^2x^2,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es gilt ferner die Aussage:

Lemma 10.11

Wird (S1)-(S6) vorausgesetzt, so ist die Relation $\succ\cdot$ streng monoton wachsend.

Beweis:
Sei $x^1 \geq x^2$, wobei $x^1=h(p^1,M^1)$ und $x^2=h(p^2,M^2)$. Da $p^1>0$, folgt mit (S2)

$$M^1 = p^1x^1 > p^1x^2.$$

Diese Ungleichung führt mit Theorem 10.4 auf $U_{p*}(x^1)>U_{p*}(x^2)$ und damit auf $x^1 \succ\cdot x^2$.

Um Komplikationen am Rande des Wertebereichs zu vermeiden, wollen wir von nun an $D(h)= \mathbb{R}^n_{++}$ voraussetzen und müssen deshalb die Bedingungen (S1)-(S6) entsprechend geringfügig modifizieren, indem wir M=0 ausschließen.
Definieren wir die Menge $R^\cdot(x)$ durch:

$$R^\cdot(x) := \{y \mid y\in \mathbb{R}^n_{++} \wedge y \succeq\cdot x\}$$

für $x\in \mathbb{R}^n_{++}$, so läßt sich zeigen, daß $R^\cdot(x)$ eine konvexe Menge ist. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Theorem 10.7

Erfüllt h die Bedingungen (S1)-(S6), so ist $R^\cdot(x)$ für alle $x\in \mathbb{R}^n_{++}$ konvex.

Beweis:
Es ist zu zeigen:

$y,z \varepsilon R'(x) \wedge z \neq y \Rightarrow \gamma z+(1-\gamma)y \varepsilon R'(x)$, falls $\gamma \varepsilon]0,1[$.

Da die Relation $\succsim\cdot$ vollständig ist, können wir o.B.d.A. $y \succsim z$ annehmen. Verstehen wir unter x^γ ein Güterbündel, das durch die Gleichung

$$x^\gamma = (1-\gamma)y+\gamma z, \quad \forall \gamma \varepsilon]0,1[$$

bestimmt ist, so gibt es eine Preis-Einkommen-Situation (p^γ,M^γ) mit $x^\gamma = h(p^\gamma,M^\gamma)$ und

(1) $\quad x^\gamma p^\gamma = (1-\gamma)yp^\gamma+\gamma zp^\gamma.$

Hieraus folgt aber

$$p^\gamma x^\gamma > p^\gamma y \vee p^\gamma x^\gamma \geqq p^\gamma z.$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, so erhielten wir die Ungleichung $p^\gamma x^\gamma < (1-\gamma)yp^\gamma+\gamma zp^\gamma$, im Widerspruch zu (1). Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: $p^\gamma x^\gamma > p^\gamma y$.

Hieraus folgt mit Theorem 10.4

$$U_{p*}(x^\gamma) > U_{p*}(y),$$

so daß dieses Ergebnis zusammen mit $U_{p*}(y) \geqq U_{p*}(x)$ sofort auf $U_{p*}(x^\gamma) > U_{p*}(x)$ führt. Damit gilt auch $x^\gamma \succ\cdot x$.

2. Fall: $p^\gamma x^\gamma \geqq p^\gamma z$.

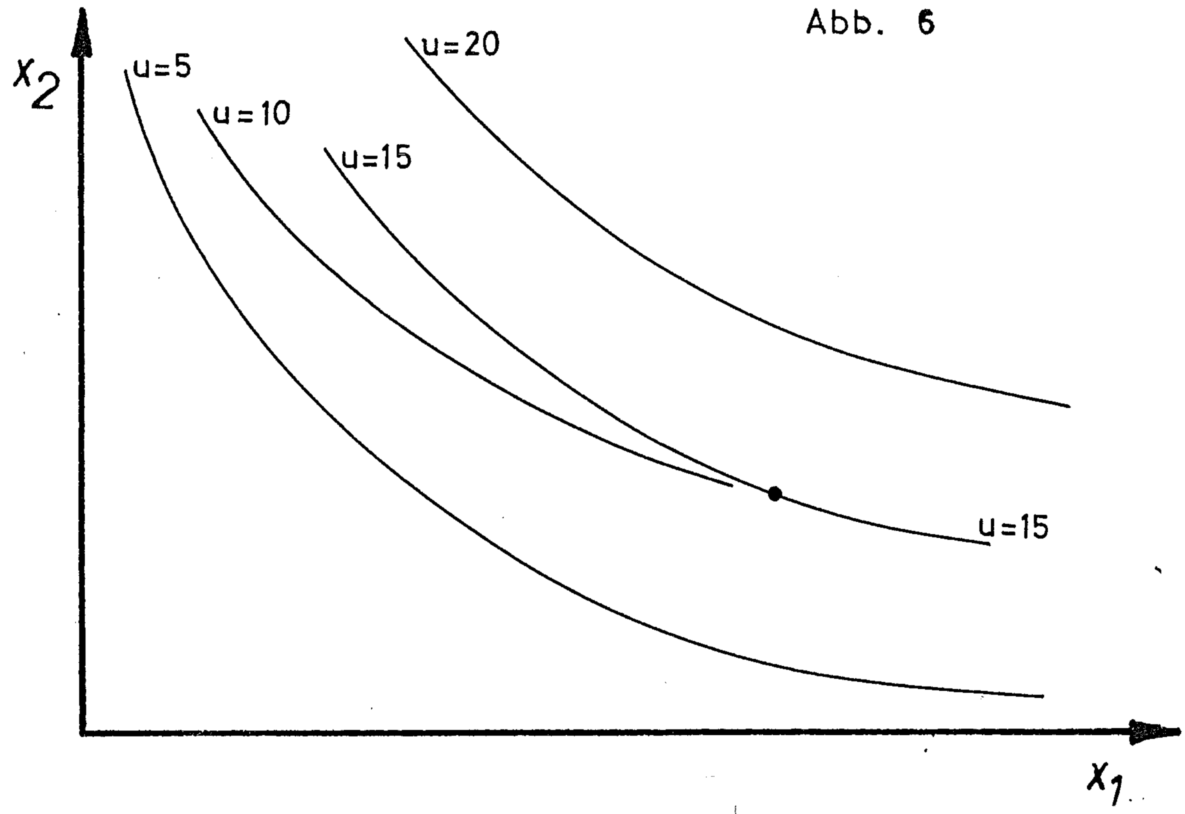
Da $x^\gamma \neq z$, folgt mit Theorem 10.4

(2) $\quad U_{p*}(x^\gamma) > U_{p*}(z).$

Da ferner $U_{p*}(z) \geqq U_{p*}(x)$ gilt, erhalten wir mit (2) $U_{p*}(x^\gamma) > U_{p*}(x)$, womit sich $x^\gamma \succ\cdot x$ ergibt.

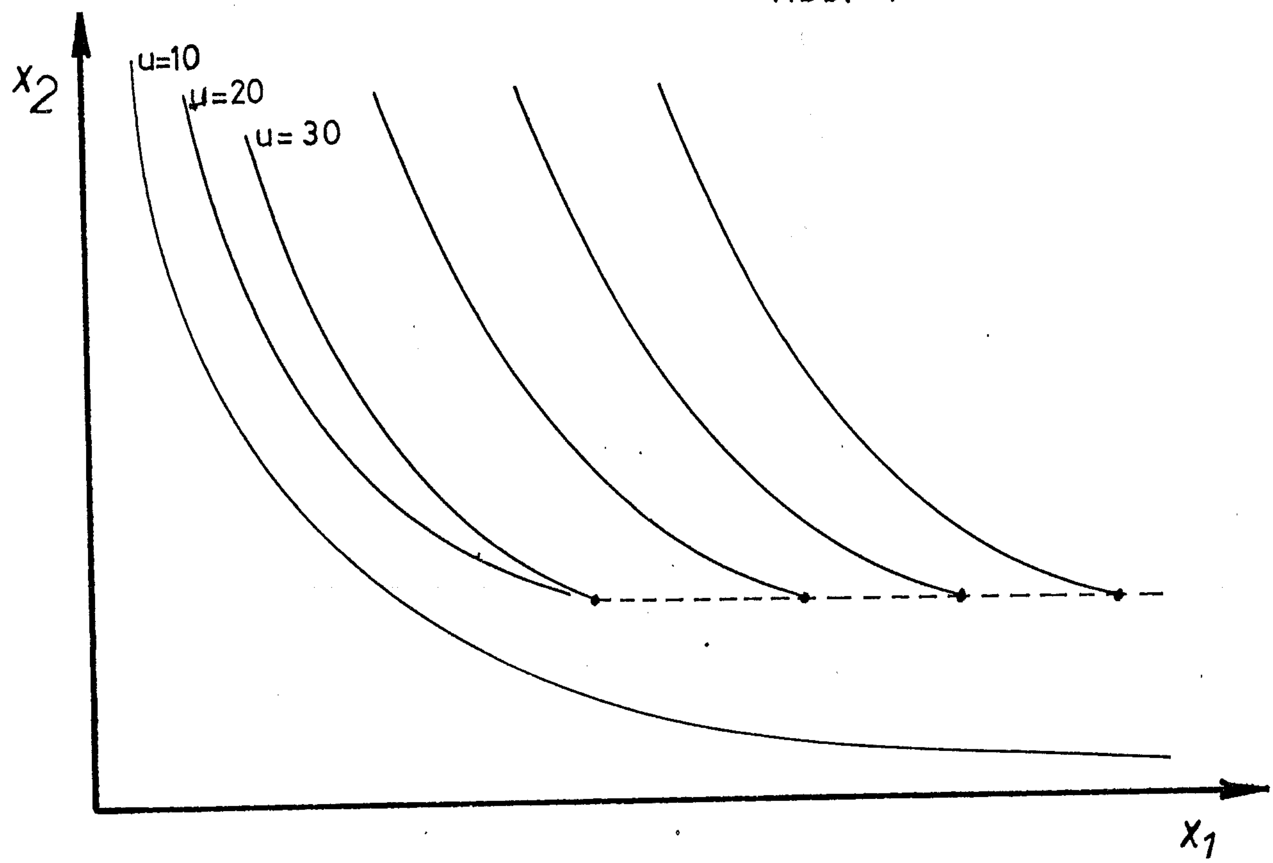
Präferenzrelationen, die von oben halbstetig, vollständig, transitiv und zum Ursprung strikt konvex sind, können ein Präferenzfeld, zu dem die folgende graphische Darstellung gehört, besitzen.

Abb. 6



Es ist jedoch bisher nicht bekannt, ob die Bedingungen (S1)-(S6) eine Präferenzrelation, die durch Abb. 7 graphisch dargestellt wird, zulassen. Hier tritt der Fall auf, daß für ein $x^a \varepsilon \mathbb{R}^n_{++}$ Randpunkte von $R^*(x^a)$, die keine unteren Randpunkte sind, existieren. Unsere Untersuchungen werden schließlich zeigen, daß die in Definition 10.5 definierte Relation $\succsim$ keinen Graphen wie in Abb. 6 besitzen kann, wenn wir (S1)-(S6) voraussetzen. Jedoch ist ein Graph, wie er in Abb. 7 dargestellt wird, vielleicht möglich.

Abb. 7



Der folgende Satz führt bereits darauf, daß die Existenz einer Stützhyperebene $\{x \mid x \in IR^n \wedge qx=M \wedge q \in IR^n_+ \wedge q \not> 0\}$ an $R^{\circ}(x^a)$ notwendig ist, falls U_{p^*} an einer Stelle unstetig ist.

Theorem 10.8

Wird (S1)-(S6) vorausgesetzt und ist U_{p*} an der Stelle $x^b \in IR^n_{++}$ unstetig, so ist x^b Randpunkt einer Menge $R^{\circ}(x^a)$, und es gilt ferner:

(a) Es gibt eine Folge $\langle y^k \rangle$, $y^k = h(p^k, M^k)$, mit den Eigenschaften: $y^k \notin R(x^a)$, $\lim_{k\to\infty} y^k = x^b$, $\lim_{k\to\infty} p^k = p^o \geq 0$ und $\lim_{k\to\infty} M^k = M^o > 0$, aber $p^o \not> 0$.

(b) $H^o = \{x \mid p^o x = M^o\}$ ist Stützhyperebene in x^b an $R^{\circ}(x^a)$.

Beweis: [1]

Da die Relation $\succsim^{\circ}$ von oben halbstetig ist, gilt

(1) $(\forall y \in IR^n_{++})[R^{\circ}(y) = \overline{R^{\circ}(y)}]$.

Sei nun U_{p*} an der Stelle x^b unstetig. Da U_{p*} von oben halbstetig ist, gibt es eine Folge $\langle x^k \rangle$ mit $\lim_{k\to\infty} x^k = x^b \in IR^n_{++}$ und

(2) $U_{p*}(x^k) \leqq \alpha$, $\forall k \in IN$, und $U_{p*}(x^b) = \bar{\alpha} > \alpha$.

Betrachten wir irgendein $x^a \in IR^n_{++}$ mit $U_{p*}(x^a) = \bar{\alpha}$, so ist x^b aufgrund der Definition von $\succsim^{\circ}$ Randpunkt von $R^{\circ}(x^a)$. Da h homogen vom Grade 0 ist (vgl. Hurwicz und Uzawa (1971, S.134)), können wir die $p^k > 0$ so wählen, daß $\|p^k\| = \|p^b\|$. Daher gibt es eine Teilfolge $\langle p^{k_\nu} \rangle$ von $\langle p^k \rangle$ mit $\lim_{k_\nu\to\infty} p^{k_\nu} = p^o$. Da $\|p^{k_\nu}\| > 0$, folgt auch $\|p^o\| > 0$ und damit $p^o \geq 0$. Von

$$\lim_{k_\nu\to\infty} h(p^{k_\nu}, M^{k_\nu}) \cdot \lim_{k_\nu\to\infty} p^{k_\nu} = \lim_{k_\nu\to\infty} M^{k_\nu} = M^o$$

können wir auf $x^b p^o = M^o > 0$ schließen.

[1] Zum Beweis wird eine Methode von Hurwicz und Uzawa verwandt (1971, S. 133-134).

Es ist nun noch zu zeigen, daß $p^o \nleq 0$. Wäre nun $p^o > 0$, so würde sich mit der Stetigkeit von h, die aus (S4) folgt,

$$(3) \qquad x^b = \lim_{k_\nu \to \infty} h(p^{k_\nu}, M^{k_\nu}) = h(p^o, p^o x^b) = h(p^o, M^o)$$

ergeben. Aus $U_{p^*}(x^{k_\nu}) \leqq \alpha$ folgt laut Definition $\mu(p^*; p^{k_\nu}, M^{k_\nu}) \leqq \alpha$. Da aber μ bezüglich (p,M) stetig ist (vgl. Hurwicz und Uzawa (1971, S.124)), folgt

$$\lim_{p^{k_\nu} \to p^o} \mu(p^*; p^{k_\nu}, M^{k_\nu}) = \mu(p^*; p^o, M^o) \leqq \alpha,$$

so daß aufgrund von (3)

$$U_{p^*}(x^b) \leqq \alpha$$

gilt. Das aber ist ein Widerspruch zu (2). Es gilt also $p^o \nleq 0$.

Beweis zu (b): Wir zeigen zunächst, daß die Hyperebenen $H^{k_\nu} = \{x \mid p^{k_\nu} = M^{k_\nu}\}$ die Menge $\mathring{R}(x^a)$ nicht schneiden.
Annahme: Es gibt ein $\tilde{k}_\nu$, so daß H^{k_ν} $\mathring{R}(x^a)$ schneidet.
Dann gibt es ein $\tilde{x}$ mit $p^{\tilde{k}_\nu}\tilde{x} < M^{\tilde{k}_\nu}$ und $\tilde{x} \varepsilon \mathring{R}(x^a)$. Mit Theorem 10.4 können wir dann auf $x^{\tilde{k}_\nu} \succ \tilde{x}$ schließen. Da $x^{\tilde{k}_\nu} \notin \mathring{R}(x^a)$, folgt mit der Vollständigkeit von $\succsim$ $x^a \succ x^{k_\nu}$, so daß wir schließlich $x^a \succ \tilde{x}$ und damit $\tilde{x} \notin \mathring{R}(x^a)$ erhalten. Dies aber widerspricht dem zuvor gewonnenen Ergebnis.
Da nun $p^{k_\nu} \to p^o$ und $M^{k_\nu} \to M^o$ erfüllt ist, konvergieren die Hyperebenen M^{k_ν} gegen $H^o = \{x \mid p^o x = M^o\}$. Da die H^{k_ν} die Menge $\mathring{R}(x^a)$ nicht schneiden, muß dies auch für H^o gelten. $\mathring{R}(x^a)$ ist eine konvexe Menge und x^b erfüllt die Gleichung $p^o x = M^o$, außerdem ist x^b Randpunkt von $\mathring{R}(x^a)$. Infolgedessen ist H^o Stützhyperebene an $\mathring{R}(x^a)$ in x^b.

Korollar 10.3

Ist U_{p^*} unstetig an der Stelle x^b, so gibt es ein $x^a \varepsilon IR^n_{++}$ und ein $x^c \varepsilon IR^n_{++}$ derart, daß x^c Randpunkt von $\mathring{R}(x^a)$, aber kein unterer Randpunkt von $\mathring{R}(x^a)$ ist.

Beweis:
Da gemäß dem Beweis von Theorem 10.8 die Hyperebene

$H^o=\{x|p^o x=M^o \wedge p^o \ngtr 0\}$ Stützhyperebene in x^b an $R(x^a)$ ist, können wir z.B. den Punkt x^c so bestimmen, daß

$$x_i^c = x_i^b \;, \; \forall i \text{ mit } p_i^o \neq 0$$

und

$$x_i^c > x_i^b \;, \; \forall i \text{ mit } p_i^o = 0.$$

Dann erfüllt x^c die Gleichung $p^o x=M^o$ und x^c ist Randpunkt aber kein unterer Randpunkt von $R^*(x^a)$.

Die Ergebnisse von Theorem 10.8 legen uns nahe, die Bedingung D VI, die uns von der Theorie der Revealed Preference her bekannt ist, zu den Hypothesen (S1)-(S6) hinzuzufügen, um die Stetigkeit von U_{p*} zu gewinnen. Unser Theorem 10.8 führt dann sofort zu dem folgenden zentralen Satz.

Theorem 10.9

Eine Nachfragefunktion genüge den Postulaten (S1) - (S6) und erfülle die Bedingung,:

(S7): Für jede Folge $<(p^\nu,M^\nu)>$ mit $(p^\nu,M^\nu)\varepsilon \mathbb{R}^{n+1}_{++}$, die die Bedingungen $\lim\limits_{\nu\to\infty} p^\nu = p^o \geq 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} h(p^\nu,M^\nu) = \bar{x} > 0$ erfüllt, gilt $p^o > 0$

Dann ist die Funktion U_p* stetig.

Der Beweis dieser Behauptung wird indirekt geführt. Wir nehmen an, U_{p*} wäre stetig und erhalten mit Theorem 10.8 sogleich einen Widerspruch zu (S7).

Auf der Grundlage der vorausgegangenen Überlegungen wird deutlich, daß durch die Zufügung des Postulates (S7) die Menge $R^*(x^a)$ nur Randpunkte besitzt, die auch untere Randpunkte sind. Aus dem Beweis von Theorem 10.8 ist leicht zu entnehmen, daß er in ähnlicher Weise auch in der Theorie der Revealed Preference geführt werden kann. Deshalb verhindert dort die dem Postulat (S7) entsprechende Prämisse D VI, daß Randpunkte der Menge $\{x|u(x)\geq\alpha\}$ auftreten, die keine unteren Randpunkte sind. Aber es gibt noch eine weitere Gemeinsamkeit!

der Theorie der Revealed Preference nachgewiesen, daß unter den Voraussetzungen DI-D V eine geringfügige Modifikation von D VI notwendig und hinreichend für die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion, die h generiert, ist, so gilt das gleiche auch unter der Voraussetzung von (S1)-(S6) für (S7).

Theorem 10.10

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ eine Nachfragefunktion, die (S1)-(S6) erfüllt und den Wertebereich $D(h) = \mathbb{R}^n_{++}$ besitzt. Dann ist die Funktion U_{p^*} nur stetig, wenn sie die Bedingung

(S7)': Für alle $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ und für jede beliebige Folge $\langle(p^\nu, M^\nu)\rangle$ in $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ mit den Eigenschaften: $h(p^\nu, M^\nu) \notin R^*(x^a)$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} h(p^\nu, M^\nu) = x^c \in R^*(x^a)$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} p^\nu = p^o \geq 0$ gilt $p^o > 0$,

erfüllt.

Beweis:

Unter Berücksichtigung von Theorem 10.9 genügt es, die Stetigkeit von U_{p^*} vorauszusetzen und (S7)' zu zeigen.
Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß für irgendein $x^a \in \mathbb{R}^n_{++}$ eine Folge $\langle x^\nu\rangle$ mit $x^\nu = h(p^\nu, M^\nu)$ existiert, so daß $x^\nu \notin R^*(x^a)$, $\lim x^\nu = x^c \in R^*(x^a)$ und $\lim p^\nu = p^o \geq 0$, jedoch $p^o \not> 0$. Unter Verwendung von (S2) ergibt sich:

$$x^c \cdot p^o = \lim_{\nu\to\infty} x^\nu \cdot \lim_{\nu\to\infty} p^\nu = \lim_{\nu\to\infty} M^\nu = M^o > 0.$$

Betrachten wir den Beweis zu Theorem 1 (b), so können wir schließen, daß $H^o = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \wedge p^o x = M^o\}$ Stützhyperebene an $R^*(x^a)$ in x^c ist. Infolgedessen gibt es ein $x^z \in R^*(x^a)$ mit der Eigenschaft $x^z \geq x^c$ und $x^z p^o = M^o$. Damit ist x^z Randpunkt von $R^*(x^a)$, und es gilt ferner

(1) $\quad U_{p^*}(x^z) > U_{p^*}(x^c) \geqq U_{p^*}(x^a)$.

Da U_{p^*} stetig ist, gibt es ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ und ein $\tilde{x} \in U_{\tilde{\varepsilon}}(x^z)$ derart, daß $x^z > \tilde{x}$ und $U_{p^*}(\tilde{x}) > U_{p^*}(x^c)$. Infolgedessen erhalten wir mit (1)

(2) $\quad U_{p^*}(\tilde{x}) > U_{p^*}(x^a)$.

Da jedoch x^z ein Randpunkt von $R'(x^a)$ ist, gilt $\tilde{x}\notin R'(x^a)$. Dieses Ergebnis führt aber zu $U_{p*}(\tilde{x})<U_{p*}(x^a)$, was im Widerspruch zur Zeile (2) steht. Damit ist die Annahme zu verwerfen.

Anmerkung 10.5

Es sei darauf hingewiesen, daß wir in Theorem 10.8 die Bedingung (S7) anstelle von (S7)' nur aus mathematisch-stilistischen Gründen verwenden, weil wir in den Voraussetzungen nicht bereits von der Funktion U_{p*} sprechen wollen, deren Existenz erst aus den anderen Prämissen gefolgert werden kann.

Abschließend kommen wir noch zu einem Satz, in welchem Bedingungen, unter denen man von einer halbstetigen zu einer stetigen Nutzenfunktion gelangt, genannt werden. Dieser Satz findet sowohl in der Theorie der Revealed Preference (vgl. Fuchs-Seliger (1980a, S. 89-96)) als auch in dem Modell von Hurwicz und Uzawa Verwendung. Er steht in einer engen Beziehung zu einem Lemma von Sonnenschein (1971b, S.77), setzt aber nicht wie dieses die Invertierbarkeit von h voraus.

Lemma 10.12

Sei $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_+$ eine Nachfragefunktion mit dem Wertebereich T, die stetig und homogen vom Grade Null ist. Es gelte ferner:

(a) $(\forall p>0)(\forall M\geqq 0)[p\cdot h(p,M)=M]$,

(b) h werde von einer Nutzenfunktion u generiert ,

(c) $R^o(z) = \{y \mid y\in T \wedge u(y)\geqq u(z)\}$ ist für alle $z\in T$ abgeschlossen in T.

(d) $(\forall x,y\in T)[x=h(p^x,M^x) \wedge u(x)>u(y) \Rightarrow (\exists\delta>0)[u(h(p^x,M^x-\delta))>u(y)]]$.

(e) Zu jedem $\bar{y}\in R^o(z)\cap\overline{T\setminus R^o(z)}$ gibt es ein p' derart, daß
$p'\bar{y} = \min_{y\in R^o(z)} p'y$ und $\bar{y}=h(p',\min_{y\in R^o(z)} p'y)$.

Dann ist die Menge $R^{-1}(x) := \{y \mid y\in T \wedge u(y)\leqq u(x)\}$ abgeschlossen in T.

Beweis:

Sei $\bar{x}\varepsilon T$ und $P(\bar{x}) := T\setminus R^{-1}(\bar{x})$. Es genügt zu beweisen, daß die Gleichung $P(\bar{x}) = \text{int } R^{o}(\bar{x})$ gilt. Dabei wird mit int $R^{o}(\bar{x})$ das Innere von $R^{o}(\bar{x})$ bezüglich T bezeichnet.
Um zu zeigen, daß int $R^{o}(\bar{x}) \subseteq P(\bar{x})$, betrachten wir ein $y\varepsilon \text{ int } R^{o}(\bar{x})$ mit $y=h(p^{y},M^{y})$. Dann gibt es ein $\varepsilon>0$ mit der Eigenschaft

(1) $\quad (\forall x\varepsilon U_{\varepsilon}(y))[u(x) \geqq u(\bar{x})]$.

Da h stetig bezüglich M ist, gibt es ein $M'<M^{y}$, so daß $y'=h(p^{y},M')\varepsilon U_{\varepsilon}(y)$. Aufgrund der Voraussetzung (b) gilt dann $u(y)>u(y')$. Dies führt mit (1) zusammen auf $u(y)>u(\bar{x})$. Infolgedessen gilt $y\varepsilon P(\bar{x})$.
Den Beweis für "$P(\bar{x}) \subseteq \text{int } R^{o}(\bar{x})$" führen wir indirekt und nehmen deshalb an:

$$(\exists\bar{y}\varepsilon P(\bar{x}))[\bar{y}\varepsilon R^{o}(\bar{x})\cap\overline{T\setminus R^{o}(\bar{x})}].$$

Damit ist $\bar{y}$ ein Randpunkt von $R^{o}(\bar{x})$. Mit Voraussetzung (e) schließen wir nun auf

$$(\exists\bar{p})[\bar{p}\bar{y} = \min_{y\varepsilon R^{o}(\bar{x})} \bar{p}\cdot y \wedge \bar{y}=h(\bar{p},\min_{y\varepsilon R^{o}(\bar{x})} \bar{p}\cdot y).$$

Mit (a) erhalten wir ferner die Gleichung

$$\bar{p}\bar{y} = \min_{y\varepsilon R^{o}(\bar{x})} \bar{p}\cdot y$$

Infolgedessen gilt:

$$(\forall\delta>0)[h(\bar{p},\bar{p}\bar{y}-\delta)) \notin R^{o}(\bar{x})].$$

Hieraus ergibt sich:

(2) $\quad (\forall\delta>0)[u(h(\bar{p},\bar{p}\bar{y}-\delta)) \nless u(\bar{x})]$.

Da aber $\bar{y}\varepsilon \mathbb{P}(\bar{x})$, gibt es ein $\delta>0$, so daß $u(h(\bar{p},\bar{p}\bar{y}-\delta)) > u(\bar{x})$. Das ist jedoch ein Widerspruch zu (2), womit die Annahme zu verwerfen ist.

q.e.d.

Wir werden nun den Nachweis dafür erbringen, daß unter den Bedingungen (S1)-(S6) auch die Voraussetzungen von Lemma 10.10 erfüllt sind, wenn wir eine superiore Nachfragefunktion mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^{n}_{++}$ betrachten.

Theorem 10.11

Unter den Bedingungen (S1)-(S6) erfüllt eine superiore Nachfragefunktion mit dem Wertebereich IR^n_{++} auch die Voraussetzungen von Lemma 10.12.

Beweis:
Da unter den Prämissen (S1)-(S6) die Menge $R'(x)=\{z \mid U_{p^*}(z) \geqq U_{p^*}(x)\}$ abgeschlossen in IR^n_{++} ist, genügt es, die Gültigkeit von (d) und (e) zu überprüfen.
Zu (d) [1]: Seien y und z Elemente aus IR^n_{++} und es gelte $U_{p^*}(y) > U_{p^*}(z)$. Aus der Annahme

$$\neg(\exists\delta>0)[U_{p^*}(h(p^y, M^y-\delta)) > U_{p^*}(z)]$$

folgt, daß eine Nullfolge $<\delta_k>$ existiert derart, daß $y^k=h(p^y, M^y-\delta_k)$ und $U_{p^*}(z) \geqq U_{p^*}(y^k)$. Infolgedessen gilt

$$(\forall k)[\mu(p^*;p^y,M^y-\delta_k) \leqq U_{p^*}(z)] \text{ und } \mu(p^*;p^y,M^y) > U_{p^*}(z).$$

Das aber ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von μ.
Zu (e): Seien $x^a, x^b \in IR^n_{++}$ und $x^b \in R'(x^a) \cap \overline{IR^n_{++} \setminus R'(x^a)}$. Da U_{p^*} von oben halbstetig ist, gilt $\overline{R'(x^a)}=R'(x^a)$, so daß x^b Randpunkt von $R'(x^a)$ bezüglich IR^n_{++} ist. Da $R'(x^a)$ abgeschlossen und von unten beschränkt ist, existiert ein Element in $R'(x^a)$, das den Term $p^b \cdot x$ minimiert. Nehmen wir

$$(1) \qquad M^b = p^b x^b > \min_{x \in R'(x^a)} p^b \cdot x$$

an, und betrachten wir $\tilde{x} = h(p^b, \min_{x \in R'(x^a)} p^b \cdot x)$! Hieraus folgt mit (1) und Theorem 10.4

$$U_{p^*}(x^b) > U_{p^*}(\tilde{x}) \ .$$

Verwenden wir unser Ergebnis aus (e), so gibt es ein $\hat{\delta}>0$, für das $U_{p^*}(h(p^b, M^b-\hat{\delta})) > U_{p^*}(\tilde{x})$ gilt. Da definitionsgemäß $\tilde{x} \in R'(x^a)$, gilt demnach auch $h(p^b, M^b-\hat{\delta}) \in R'(x^a)$. Aufgrund der Superiorität von h folgt

---

[1] Wir verwenden hier die gleiche Beweismethode wie Sonnenschein (1971b, S.79).

(2) $\quad x^b > h(p^b, M^b-\delta)$.

Andererseits ist x^b Randpunkt von $R'(x^a)$ bezüglich $\mathbb{R}^n_{++}$. Da jedoch $h(p^b, M^b-\delta) \varepsilon R'(x^a)$, ergibt sich hieraus ein Widerspruch zu (2), so daß die Annahme zu verwerfen ist.

Mit dem obigen Satz wollen wir unsere Untersuchung von modernen Nachfragemodellen beschließen. Sie hat erwiesen, daß zwischen der Theorie der Revealed Preference und dem Modell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa eine enge Verbindung besteht. In jedem der drei Nachfragemodelle, die wir hier präsentierten, ist unter angemessenen Voraussetzungen die Slutsky-Hicks-Matrix negativ semidefinit und symmetrisch, und es existiert stets eine Präferenzrelation, durch die das Nachfrageverhalten des Handlungsträgers rationalisiert wird.

§ 11 Kollektive rationale Wahl

11.1 Aggregation von Nachfragefunktionen

Bisher haben wir nur das Verhalten eines einzelnen Individuums oder des Repräsentanten einer Gruppe behandelt. In vielen Bereichen der Ökonomie wie z.B. in der Gleichgewichts-, Außenwirtschafts- und Wohlfahrtstheorie ist es jedoch wichtig, eine gesellschaftliche Nutzenfunktion, die die gesamtwirtschaftliche Nachfragefunktion generiert und aus den individuellen Nutzenfunktionen abgeleitet werden kann, zu kennen.
Autoren wie Samuelson (1956), Gorman (1953), Muellbauer (1975), Milne (1979) u.a., haben die Frage untersucht, bei welchen Prämissen die individuellen Präferenzen so aggregiert werden können, daß eine kollektive Nutzenfunktion, die die Gesamtnachfragefunktion generiert, existiert. Im Jahre 1961 veröffentlichte Eisenberg einen Artikel, aus welchem hervorgeht, daß bei proportionaler Einkommensverteilung und linear homogenen, konkaven individuellen Nutzenfunktionen die aggregierte Nachfragefunktion von einer linear homogenen und konkaven Nutzenfunktion generiert wird. Unter ähnlichen Voraussetzungen kann jedoch auch gezeigt werden, daß sowohl in der Theorie der Revealed Preference als auch in dem Nachfragemodell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa eine aggregierte Nachfragefunktion existiert, die sich so verhält, als wäre sie bezüglich einer kollektiven Präferenzordnung rational. Um in der Theorie der Revealed Prefernce aus den individuellen Nachfragefunktionen eine aggregierte zu gewinnen, ist es erforderlich, daß sich das Starke Axiom auch auf das Kollektiv vererbt. Wie W. Shafer (1977) zeigen konnte, trifft das auch zu, wenn die individuellen Nachfragefunktionen linear homogen in M sind, wobei hierunter folgendes zu verstehen ist:

Definition 11.1

Eine Nachfragefunktion $h: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ heißt linear homogen in M genau dann, wenn:

$$(\forall (p,M) \varepsilon \mathbb{R}^{n+1}_{++})(\forall \lambda > 0)[h(p,\lambda M) = \lambda h(p,M)].$$

Wir betrachten nun einen Markt mit m Konsumenten, deren Verhalten durch die entsprechenden m Nachfragefunktionen
$h^i: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$, $x^i = h(p^i, M^i)$, $i \varepsilon \{1,\ldots,m\}$, beschrieben wird. Verstehen wir unter M das Nationaleinkommen, so ist das Einkommen des i-ten Individuums ein Teil desselben. Es soll daher gelten

$$(V):\ M^i = \delta^i M,\ \delta^i > 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{m} \delta^i = 1,$$

d.h. also, es wird eine feste proportionale Einkommensverteilung gefordert.
Die Gesamtnachfragefunktion, welche mit $H(p,M)$ bezeichnet wird, soll erklärt werden durch die

Definition 11.2

Für eine feste, proportionale Verteilung $\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^m)$ ergebe sich die Gesamtnachfrage durch

$$H(p,M) = \sum_{i=1}^{m} h^i(p,\delta^i M), \quad \forall (p,M) \varepsilon \mathbb{R}^{n+1}_{++}.$$

Mit unserem nächsten Theorem wiederholen wir das bereits oben erwähnte Resultat von Shafer.

Theorem 11.1

Seien m individuelle Nachfragefunktionen $h^i: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ gegeben, die alle linear homogen in M sind, das Starke Axiom D V und die Budgetgleichung erfüllen. Dann genügt unter der Bedingung (V) die Gesamtnachfragefunktion ebenfalls dem Starken Axiom.

Den Beweis dieser Behauptung können wir bei Shafer nachlesen. Dieser zeigt auch, daß sich für individuelle Nachfragekorrespondenzen, die linear homogen in $\delta^i M$ sind, das Kongruenzaxiom bei Aggregation auf die Gesamtnachfragekorrespondenz vererbt. Aufgrund des Resultates von W. Shafer können wir nachweisen, daß die aggregierte Nachfragefunktion die Bedingungen D I - D V erfüllt und linear homogen in M ist, wenn das gleiche für die individuellen Nachfragefunktionen gilt.

Theorem 11.2

Seien m individuelle Nachfragefunktionen $h^1,\ldots,h^m$ mit dem Wertebereich IR^n_{++} gegeben. Alle diese sollen linear homogen bezüglich des Einkommens sein und die Bedingungen D I - D V erfüllen. Ist ferner eine Einkommensverteilung gemäß (V) gegeben, so ist die Gesamtnachfragefunktion gleichfalls linear homogen in M und erfüllt D I - D V .

Beweis:
Aufgrund der Definition von H ist es klar, daß H die Bedingungen D I und D II erfüllt.
Auch die Budgetgleichung ergibt sich leicht, denn es gilt:

$$p\cdot H(p,M) = p\cdot \sum_{i=1}^{m} h^i(p,\delta^i M) = \sum_{i=1}^{m} p\cdot h^i(p,\delta^i M) = \sum_{i=1}^{m} \delta^i M = M.$$

Zu D IV und D VI : Definitionsgemäß sind Nachfragefunktionen, die in M linear homogen sind und den Wertebereich IR^n_{++} besitzen, auch superior. Von solchen Funktionen wissen wir jedoch (vgl. Theorem 9.8), daß sie das Axiom D IV erfüllen. (Deshalb war es eigentlich auch überflüssig, D IV für die h^i zu fordern).
Aufgrund dieser Überlegung genügt es nachzuweisen, daß H linear homogen in M ist. Das aber folgt in wenigen Schritten:
Für alle $\lambda>0$ gilt:

$$\lambda H(p,M) = \lambda\cdot \sum_{i=1}^{m} h^i(p,\delta^i M) = \sum_{i=1}^{m} \lambda h^i(p,\delta^i M)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} h^i(p,\delta^i \lambda M) = H(p,\lambda M).$$

Da H die Bedingung D V wegen des vorhergehenden Theorems erfüllt, ist der Satz damit bewiesen.

Unter Verwendung von Theorem 9.8 und Korollar 9.1 gewinnen wir sogar das folgende Ergebnis:

Korollar 11.1

Unter den Voraussetzungen von Theorem 11.2 existiert eine stetige, monotone und streng quasikonkave Nutzenfunktion, die die aggregierte Nachfragefunktion H generiert.

Um die Existenz einer stetigen und linear homogenen Nutzenfunktion, die H generiert, nachzuweisen, verwenden wir das nachfolgende Ergebnis von Chipman und Moore (1980, S.410).

Lemma 11.1

Sei die Relation $\succsim$ homothetisch [1], nicht-saturierbar [2], schwach monoton [3], stetig, transitiv und vollständig auf dem $\mathbb{R}^n_+$. Dann existiert eine Nutzenfunktion $u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+)[u(x) \geqq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y]$.

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}^n_+)(\forall \lambda \in \mathbb{R}_{++})[u(\lambda x) = \lambda u(x)]$.

(iii) u ist stetig auf $\mathbb{R}^n_+$.

Anmerkung 11.2

Für unseren nächsten Satz benötigen wir Lemma 11.1 für $X = \mathbb{R}^n_{++}$. Wie jedoch aus dem Beweis von Chipman und Moore sofort zu erkennen ist, gilt er auch in diesem Bereich.

Lemma 11.2

Unter den Voraussetzungen von Theorem 11.2 besitzt die Relation $\overline{R}^*_H$ die Eigenschaften (i)-(iii) von Lemma 11.1.

---

1) Eine Relation $\succsim$ heißt "homothetisch"
:$\Leftrightarrow$ $(\forall \lambda > 0)[x \succsim y \Rightarrow \lambda x \succsim \lambda y]$.

2) $\succsim$ heißt "nicht-saturierbar" auf X
:$\Leftrightarrow$ $(\forall x \in X)(\exists z \in X)[z \succ x]$.

3) $\succsim$ heißt "schwach monoton" auf X
:$\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in X)[x \geqq y \Rightarrow x \succsim y]$

Hierbei ist zu bemerken, daß wir die Bezeichnung $\overline{R^*_H}$ anstelle von $\overline{R^*}$ deshalb wählen, um herauszustellen, daß diese Relation durch die aggregierte Nachfragefunktion bestimmt wird.

Beweis:
Es ist zu zeigen, daß $\overline{R^*_H}$ die Voraussetzungen von Lemma 11.1 erfüllt. Wir beweisen zunächst, daß R^*_H homothetisch ist:
Sei $x,y \in \mathbb{R}^n_{++}$ mit $x \neq y$ und $xR^*_H y$ gegeben. Dann gilt

$$xR_H y \vee (\exists x^1,\dots,x^k)[xR_H x^1 \wedge \dots \wedge x^k R_H y].$$

1. Fall: $xR_H y$.
Definitionsgemäß folgt hieraus

(1) $\quad (\exists(p,M))[x=h(p,M) \wedge px \geqq py]$.

Hieraus ergibt sich für alle $\lambda>0$:

(2) $\quad \lambda px \geqq \lambda py$.

Da H aber linear homogen in M ist, können wir mit (1) und (2) wie folgt schließen:

$$\lambda M = \lambda px = p\cdot\lambda H(p,M) = p\cdot H(p,\lambda M) \geqq p\lambda y.$$

2. Fall: $(\exists x^1,\dots,x^k)[xR_H x^1 \wedge \dots \wedge x^k R_H y]$.
Da hieraus gemäß dem ersten Fall

$$(\forall\lambda>0)[\lambda x R_H \lambda x^1 \wedge \dots \wedge \lambda x^k R_H \lambda y]$$

folgt, gilt

$$\lambda x R^*_H \lambda y.$$

Wir betrachten nun z und z' mit $z\overline{R^*_H}z'$. Diese Aussageform ist definitionsgemäß äquivalent zu $\neg(z'R^*_H z)$. Nehmen wir $\neg(\lambda z\overline{R^*_H}\lambda z')$ für irgendein λ an, so folgt hieraus $\lambda z' R^*_H \lambda z$. Dieses Ergebnis führt mit dem 1. Teil des Beweises auf $z'R^*_H z$, was im Widerspruch zu $\neg(z'R^*_H z)$ steht. Also ist R^*_H homothetisch.
R^*_H ist nicht-saturierbar, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ mit $x=H(p,M)$ können wir $y=H(p,2M)$ wählen und erhalten $yR^*_H x$. Entsprechend einfach folgt die schwache Monotonie von $\overline{R^*_H}$. Aufgrund der Theoreme 9.1 und 9.8 wissen wir auch, daß $\overline{R^*_H}$ transitiv, vollständig und stetig ist, so daß also alle Voraussetzungen von Lemma 11.1 erfüllt sind.

Mit Hilfe von Lemma 11.2, Theorem 9.8 und Korollar 9.1 gewinnen wir das folgende Postulat:

Theorem 11.3

Unter den Voraussetzungen von Theorem 11.2 gibt es eine Nutzenfunktion u_H^* mit den Eigenschaften:

(a) u_H^* generiert die Gesamtnachfragefunktion H,

(b) u_H^* repräsentiert $\overline{R_H^*}$,

(c) u_H^* ist homothetisch und stetig,

(d) u_H^* ist streng quasikonkav.

Aufgrund des obigen Satzes konnten wir also sehen, daß unter geeigneten Voraussetzungen die aggregierte Nachfragefunktion gleiche Eigenschaften aufweist wie die individuellen Nachfragefunktionen. Zu demselben Ergebnis gelangte auch Chipman (1974) bei Zugrundelegung der Hypothesen des Nachfragemodells von Samuelson, Hurwicz und Uzawa. In beiden Modellen gelangt man zu einer aggregierten Nutzenfunktion, die die Gesamtnachfragefunktion generiert. Daher ist die Außenwirtschaftstheorie, in der schon seit langem die gesellschaftlichen Indifferenzkurven zur Bestimmung der Gesamtnutzenfunktion und als Hilfsmittel für den Vergleich der gesamtwirtschaftlichen Wohlfahrt der verschiedenen Volkswirtschaften dienen, ein sinnvolles Anwendungsgebiet dieser beiden Nachfragemodelle.

Wir wollen nun den von Chipman vorgeschlagenen Weg zur Aggregation von individuellen Nachfragefunktionen in dem Modell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa nachvollziehen. Dabei wählen wir jedoch ein anderes Beweisverfahren, da wir uns bereits auf die Ergebnisse von §10 stützen können.
Wir gehen von individuellen Nachfragefunktionen $h^i: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$ aus. Diese sollen die Postulate (S1)-(S6) erfüllen und linear homogen in M sein [1]. Wie

[1] Untersuchen wir den Beweis von Theorem 9.8, so ist leicht einzusehen, daß sich (S4) für superiore Nachfragefunktionen aus (S1) und (S2) deduzieren läßt und daher von diesen Postulaten abhängig ist. Wir wollen jedoch nicht immer auf diese Tatsache verweisen und setzen deshalb (S4) voraus.

hier bereits früher bemerkt wurde, sind in M linear homogene Funktionen stets auch superiore Funktionen, wenn der Wertebereich von h der $\mathbb{R}^n_{++}$ ist. Wir können deshalb unser Theorem 10.11 anwenden und dadurch die Beweise verkürzen.
Chipman geht von der gleichen Einkommensverteilung, wie wir sie in (V) gefordert haben, aus und erklärt die Gesamtnachfragefunktion wie in Definition 11.2. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß sich die Bedingungen (S1)-(S6) für in M linear homogene Nachfragefunktionen bei Aggregation vererben und sich eine Gesamtnachfragefunktion, die ebenfalls linear homogen in M ist, ergibt.

Theorem 11.4 (vgl. Chipman (1974, S. 33-34))

Seien m individuelle Nachfragefunktionen $h^k: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$, $k=1,\dots,m$, mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$ gegeben. Diese sollen ferner die Bedingungen (S1)-(S6) erfüllen und linear homogen in M sein. Dann besitzt auch die Gesamtnachfragefunktion $H: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ unter der Voraussetzung (V) alle diese Eigenschaften (S1)-(S6).

Beweis:
Die Bedingung (S1) folgt unmittelbar. (S2) läßt sich auf gleiche Weise wie in Theorem 11.2 beweisen. Dasselbe trifft für die lineare Homogenität in M der Funktion H zu. Damit ist aber auch gleichzeitig (S4) erfüllt. Da (S3) nach einem bekannten Satz der Differentialrechnung ebenfalls Gültigkeit besitzt, ist nur noch (S5) und (S6) nachzuweisen.
Zu (S5): Da die individuellen Nachfragefunktionen auch (S4) erfüllen, können wir in der Gleichung

$$h^k(p,\lambda M) = \lambda h^k(p,M), \quad \forall \lambda>0, \ \forall k \leq m$$

$\lambda = \frac{1}{M}$ setzen und partiell nach M differenzieren. Damit erhalten wir für das k-te Individuum die Gleichung

$$\frac{\partial h^k(p,1)}{\partial M} = -\frac{1}{M^2}\, h^k(p,M) + \frac{1}{M}\,\frac{\partial h^k(p,M)}{\partial M}$$

bzw.

(1) $$\frac{\partial h^k(p,M)}{\partial M} = \frac{1}{M} h^k(p,M) = h^k(p,1).$$

Setzen wir (1) in die Slutsky-Hicks-Terme

$$S^k_{ij}(p,M^k) = \frac{\partial h^k_i(p,M^k)}{\partial p_j} + \frac{\partial h^k_i(p,M^k)}{\partial M} h^k_j(p,M^k) ,$$

wobei $M^k=\delta^k M$, ein und berücksichtigen wir, daß die Slutsky-Hicks-Matrix für die individuellen Nachfragefunktionen jeweils symmetrisch ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} S^k_{ij}(p,M^k) &= \frac{\partial h^k_i(p,M^k)}{\partial p_j} + \frac{1}{M^k} h^k_i(p,M^k)\cdot h^k_j(p,M^k) \\ &= \frac{\partial h^k_j(p,M^k)}{\partial p_i} + \frac{1}{M^k} h^k_j(p,M^k)\cdot h^k_i(p,M^k) \\ &= S^k_{ji}(p,M^k). \end{aligned}$$

Infolgedessen gilt

(2) $$\frac{\partial h^k_i(p,M^k)}{\partial p_j} = \frac{\partial h^k_j(p,M^k)}{\partial p_i} .$$

Differenzieren wir dann die Gleichung

$$H(p,M) = \sum_{k=1}^{m} h^k(p,\delta^k M)$$

partiell nach p_j, so ergibt sich mit (2):

$$\frac{\partial H_i(p,M)}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h^k_i(p,\delta^k M)}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h^k_j(p,\delta^k M)}{\partial p_i} = \frac{\partial H_j(p,M)}{\partial p_j} .$$

Da auch H die Gleichung (1) erfüllt, ist demnach die zu H gehörende Slutsky-Hicks-Matrix $S^H(p,M)$ symmetrisch.
Um zu zeigen, daß $S^H(p,M)$ negativ semidefinit ist, betrachten wir die Gleichung

(3) $$S^H(p,M) = \sum_{k=1}^{m} S^k(p,M^k) + (S^H(p,M) - \sum_{k=1}^{m} S^k(p,M^k)).$$

Da nach Voraussetzung alle $S^k(p,M)$ negativ semidefinit sind, gilt das auch für die Summe $\sum_{k=1}^{m} S^k(p,M^k)$. Haben wir gezeigt, daß $S^H(p,M) - \sum_{k=1}^{m} S^k(p,M^k)$ positiv semidefinit ist, so folgt aus (3) die negative Semidefinitheit von $S^H(p,M)$.
Da H linear homogen in M ist, folgt für H auch eine entsprechende Beziehung wie sie durch (1) festgelegt wird. Deshalb gilt:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{m} S^k_{ij}(p,M^k) - \sum_{k=1}^{m} S^H_{ij}(p,M)$$

$$= M \left[\sum_{k=1}^{m} \delta^k \frac{h^k_j(p,M^k)}{M^k} \cdot \frac{h^k_i(p,M^k)}{M^k} - \left(\sum_{k=1}^{m} \delta^k \frac{h^k_j}{M^k} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \delta^k \frac{h^k_i}{M^k} \right) \right].$$

Wir betrachten nun die Matrix

$$C = [c_{kj}], \text{ wobei } c_{kj} = \frac{\partial h^k_j}{\partial M^k} = \frac{h^k_j}{M^k}$$

und setzen $\delta=(\delta^1,\ldots,\delta^m)$. Führen wir ferner die Bezeichnung

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} \delta^1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & \delta^m \end{pmatrix}$$

ein, so können wir (4) umschreiben in:

$$(5) \qquad \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^{m} S^k(p,M) - S^H(p,M) \right) = C'\Delta C - C'\delta(\delta\Delta^{-1}\delta)\delta'C.$$

Nach einem Ergebnis von Chipman (1964, S.1093) ist jedoch die Matrix in (5) positiv semidefinit, so daß aufgrund von (3) die negative Semidefinitheit von $S^H(p,M)$ unmittelbar folgt.

q.e.d.

Wir können nun unsere Theoreme 10.11, 10.10 und 10.4 anwenden und erhalten unmittelbar ein Ergebnis über die gesellschaftlichen Indifferenzkurven.

Theorem 11.5

Unter den Voraussetzungen von Theorem 11.4 existiert eine stetige gesellschaftliche Nutzenfunktion $U_p^H*: IR_{++}^n \to IR_+$, die die gesamtwirtschaftliche Nachfragefunktion H generiert.

Unter der Verwendung früherer Ergebnisse gewinnen wir schließlich die bemerkenswerten Ergebnisse, daß in dem Modell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa auch die Gesellschaft das Starke Axiom der Theorie der Revealed Preference erfüllt und rational bezüglich $\overline{R_H^*}$ handelt, falls die individuellen Nachfragefunktionen linear homogen in M sind.

Theorem 11.6

Unter Voraussetzung des Theorems 11.4 erfüllt H das Starke Axiom und ist rational bezüglich der Relation $\overline{R_H^*}$.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich als Folgerung aus den Theoremen 11.4, 10.7 und Korollar 10.2.

Anmerkung 11.3

Unter den Voraussetzungen von Theorem 11.4 folgt aus dem Beweis zu Theorem 10.7 auch, daß sich das Schwache Axiom bei Aggregation vererbt.

Gehen wir noch kurz auf die Rolle des Schwachen Axioms in der Gleichgewichtstheorie, in der das kollektive Verhalten von m Marktteilnehmern ebenfalls untersucht wird, ein! In dieser Theorie hatte A. Wald (1933) unter einer Bedingung, die nur eine andere Form des Schwachen Axioms ist, den Nachweis für die Existenz eines eindeutigen Wettbewerbsgleichgewichts, erbracht. A. Wald geht von folgenden Voraussetzungen aus (vgl. Takayama (1974, S.280)):

Die Funktion $f: IR_+^n \to IR^n$, $f(p)=(f_1(p),...,f_n(p))$ sei eine Überschußnachfragefunktion. Dabei gibt der Wert von $f_i(p)$, $i \leqq n$, die Überschußnachfrage für das i-te Gut (i=1,...,n) in einer Preissituation p, wobei $p \in \mathbb{R}^n_+$, an. Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$ sollen für jedes i stetig und von unten beschränkt sein. Gesucht wird ein Preissystem, bei welchem Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage herrscht. Aus diesem Grunde ist die folgende Definition naheliegend:

Definition 11.3

Ist $f(p): \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$, $f(p)=(f_1(p),\ldots,f_n(p))$ eine Überschußnachfragefunktion, so heißt $\hat{p} \in \mathbb{R}^n_+$ ein "Gleichgewichtspreisvektor" genau dann, wenn folgendes gilt

(a) $f_i(\hat{p}) \leqq 0, \forall i \leqq n$ und

(b) $\hat{p}_i f_i(\hat{p}) = 0, \forall i \leqq n$ und $\hat{p}_1 = 1$.

Wie wir gesehen haben, handelt unter gewissen Voraussetzungen die gesamte Volkswirtschaft rational und gemäß dem Schwachen Axiom, wenn das gleiche für alle Marktteilnehmer gilt. Der folgende Satz besagt nun, daß dann auch ein eindeutig bestimmtes Gleichgewicht an einem vollständigen Markt herrscht (vgl. Wald (1933)).

Theorem 11.7

Vorausgesetzt werde die Walras'sche Gleichgewichtshypothese für einen Markt mit vollständiger Konkurrenz:

$$(*) \qquad (\forall p \in \mathbb{R}^n_+)\left[\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(p) = 0\right].$$

Es gelte ferner das Schwache Axiom

$$(\mathrm{WA}'): \quad px < px' \vee p'x' < p'x \;{}^{1)},$$

wobei $x=f(p)$ und $x'=f(p')$.

Dann gilt: Es gibt höchstens eine Preissituation, in welcher am Markt Gleichgewicht herrscht.

---

1) $(px < px' \vee p'x' < p'x) \Leftrightarrow (px \geqq px' \Rightarrow p'x' < p'x)$
$\Leftrightarrow (xRx' \Rightarrow \neg(x'Rx))$.

Beweis:
Angenommen, es gäbe zwei Gleichgewichtspreisvektoren $\hat{p} \geq 0$ und $p^* \geq 0$ mit $\hat{p} \neq p^*$. Dann gilt für diese gemäß Definition 11.3 (b) und (*)

(1) $\hat{p}\hat{x} = 0$ und $p^*x^* = 0$, falls $\hat{x} = f(\hat{p})$ und $x^* = f(p^*)$.

Mit Hilfe des Schwachen Axioms können wir mit (1) auf

(2) $\hat{p}x^* > 0 \vee p^*\hat{x} > 0$

schließen. Aber da p^* ein Gleichgewichtspreisvektor ist, folgt aus Definition 11.3 (a) $x^* \leqq 0$ und damit $\hat{p}x^* \leqq 0$. Infolgedessen muß aufgrund der Zeile (2) $p^*\hat{x} > 0$ gelten. Aber das ist ebenfalls unmöglich, da auch $\hat{p}$ ein Gleichgewichtspreisvektor ist und wegen $\hat{x} \leqq 0$ die Ungleichung $p^*\hat{x} \leqq 0$ folgt. Somit ist die Annahme zu verwerfen.

Herrscht in einer Preissituation $\hat{p}$ Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage, so ist die Annahme naheliegend, daß bei einer festgelegten Verteilung des Volkseinkommens auf die m Marktteilnehmer auch in $\hat{p}$ die höchste Wohlfahrt für alle erreicht wird. Auf die Problematik dieser Annahme kommen wir im nächsten Abschnitt zu sprechen.

11.2 Soziale Wohlfahrt und Rationales Verhalten

Seit Pigou (1932) wird das Nationaleinkommen als Indikator für gesellschaftliche Wohlfahrt verwendet. Wie uns der vorangehende Abschnitt gezeigt hat, können unter der Annahme, daß die Verteilung des Volkseinkommens konstant bleibt, die individuellen Nachfragefunktionen so aggregiert werden, daß dies zu einer Gesamtnachfragefunktion und damit zu einer kollektiven Präferenzordnung führt. Es ist aber auch naheliegend, die Frage zu stellen, ob eine gesellschaftliche Wohlfahrtsordnung existiert. Zur Lösung dieses Problems werden wir einige Ergebnisse von Chipman und Moore (1979, 1980) verwenden.

Nehmen wir an, der Konsumraum X^i, $i=1,\dots,m$, sei eine Teilmenge des $\mathbb{R}_+^n$, dann läßt sich eine Verteilung Z durch eine Matrix im $\mathbb{R}_+^{mn}$ darstellen. Zu einer gegebenen Verteilung Z sei z^i das Güterbündel des i-ten Individuums. Beschreibt $y = \sum_{i=1}^{m} z^i$ das aggregierte Güterbündel, das auf die m Individuen verteilt werden kann und ist z_j^i der Anteil des j-ten Gutes, das dem i-ten Marktteilnehmer zur Verfügung steht, so ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 11.4

Sei $y \in \mathbb{R}_+^n$. Dann heißt

$$A'(y) := \{Z \in \mathbb{R}_+^{mn} \mid \sigma(Z) = \sum_{i=1}^{m} z^i = y\}$$

die Menge der "erreichbaren Verteilungen" von y.

Wir bezeichnen mit $R_G = (R_1,\dots,R_m)$ ein m-Tupel von individuellen Präferenzordnungen, die alle transitiv und vollständig sein mögen. Ferner soll $\mathcal{R}$ die Menge aller vollständigen und transitiven Relationen auf $\mathbb{R}_+^n$ sein. Wir führen dann auf übliche Weise eine "Paretoordnung" ein.

Definition 11.5

Sei $R_G \in \mathcal{R}$ gegeben. Eine "Paretoordnung" R_p werde dann auf folgende Weise erklärt:

$$Z R_p \bar{Z} :\Leftrightarrow (\forall i \leq m)\ z^i R_i \bar{z}^i$$

Die Relationen P_p (streng vorgezogen) und I_p (indifferent) werden wie üblich definiert durch

$$Z P_p \bar{Z} :\Leftrightarrow Z R_p \bar{Z} \wedge \neg(\bar{Z} R_p Z)$$

$$Z I_p \bar{Z} :\Leftrightarrow Z R_p \bar{Z} \wedge \bar{Z} R_p Z\ .$$

Gehen wir von Marktteilnehmern, die bezüglich ihrer Präferenzvorstellung R_i rational handeln, aus, so gilt bekanntermaßen für alle $(p,M) \varepsilon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

$$h^i(p,M) = \{z \mid z\varepsilon B(p,M) \wedge (\forall z' \varepsilon B(p,M^i))[zR_i z']\}$$

In der Definition des "Konkurrenzgleichgewichtes" gehen wir ebenfalls von Marktteilnehmern, die bezüglich R_i rational handeln, aus.

Definition 11.6

Ist $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ gegeben und sind ferner die Nachfragekorrespondenzen $h^i: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+ \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$, $i=1,\ldots,m$, rational bezüglich der R_i, so heißt das Tripel (Z,y,p) nur dann ein "Konkurrenzgleichgewicht" für R_G, wenn folgendes erfüllt ist:

(a) $p \geq 0$,
(b) $Z \varepsilon \mathbb{R}^{mn}_+$,
(c) $\sigma(Z) = y$,
(d) $z^i \varepsilon h^i(p,M^i)$, $i=1,\ldots,m$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}(R_G)$ die Menge solcher Konkurrenzgleichgewichte für R_G.

Die Steigerung der sozialen Wohlfahrt werden wir aus der Sicht zweier Kriterien betrachten: der Pigoubedingung und der Paretobedingung. Zur Formulierung der Pigoubedingung benötigen wir noch die Einführung des Kaldor-Hicks-Samuelson-Ordnung (KHS), die mit $\succsim_{R_G}$ bezeichnet werden soll (vgl. Chipman und Moore (1980, S.404)).

Definition 11.7

Sei $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ gegeben. Wird ferner für $y \varepsilon \mathbb{R}^n_+$ die Menge $A'(y)$ bestimmt durch

$$A'(y) = \{Z \mid Z\varepsilon \mathbb{R}^{mn}_+ \wedge \sigma(Z)=y\},$$

so soll die Relation $\succsim_{R_G}$ durch

$$y \succsim_{R_G} y' :\Leftrightarrow (\forall Z' \varepsilon A'(y'))(\exists Z\varepsilon A'(y))[ZR_p Z']$$

erklärt werden.

Verwenden wir diese Relation $\succsim_{R_G}$, so lautet die "Pigoubedingung":

Definition 11.8

Es heiße, daß die gesellschaftliche Präferenzordnung $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ die "Pigoubedingung" genau dann erfüllt, wenn eine Verteilung $\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^m) > 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \delta^i = 1$ existiert, so daß für alle Konkurrenzgleichgewichte (Z^a, y^a, p^a), $(Z^b, y^b, p^b) \varepsilon \mathcal{L}(R_G)$ mit $z^{a_i} \varepsilon h^i(p^a, \delta^i p^a y^a)$ und $z^{b_i} \varepsilon h^i(p^b, \delta^i p^b y^b)$, $i = 1, \ldots, m$, gilt:

$$[p^a y^b \geqq p^a y^a \wedge p^b y^b \geqq p^b y^a] \Rightarrow [y^b \succsim_{R_G} y^a].$$

Definition 11.9

Eine gesellschaftliche Präferenzordnung $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ soll der "Paretobedingung" genau dann genügen, wenn es eine Verteilung $\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^m) > 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \delta^i = 1$ gibt, so daß für alle Konkurrenzgleichgewichte (Z^a, y^a, p^a), $(Z^b, y^b, p^b) \varepsilon \mathcal{L}(R_G)$ mit $z^{a_i} \varepsilon h^i(p^a, \delta^i p^a y^a)$ und $z^{b_i} \varepsilon h^i(p^b, \delta^i p^b y^b)$ gilt:

$$[p^a y^b \geqq p^a y^a \wedge p^b y^b \geqq p^b y^a] \Rightarrow Z^b R_p Z^a \quad .$$

Unter der Verwendung zweier Resultate von Chipman und Moore gelangen wir zu dem Ergebnis, daß bei proportionaler Verteilung des Volkseinkommens sowohl in der Theorie der Revealed Preference als auch in dem Nachfragemodell von Samuelson, Hurwicz und Uzawa die gesellschaftliche Präferenzordnung die Paretobedingung nur erfüllt, wenn die individuellen Präferenzordnungen alle gleich sind. Dieses Ergebnis ist für die Wirklichkeitsnähe dieser Modelle insofern enttäuschend, da nicht anzunehmen ist, daß alle Marktteilnehmer die gleiche Wertvorstellung besitzen. Diese beiden Resultate von Chipman und Moore (1980, S. 416-417), die wir hier ohne Beweis wiedergeben, sind die folgenden:

Lemma 11.3

Ist $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ ein m-Tupel von Präferenzordnungen, die alle stetig, konvex zum Ursprung [1] und homothetisch sind, so erfüllt

---

[1] d.h. $(\forall x^i \varepsilon \mathbb{R}^n_+)(\exists p \varepsilon \mathbb{R}^n_{++})(\forall \bar{x}^i \varepsilon \mathbb{R}^n_+)[\bar{x}^i R_i x^i \Rightarrow p\bar{x}^i \geqq px^i]$.

$R_G=(R_1,\dots,R_m)$ die Pigoubedingung genau dann, wenn gilt:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_m.$$

Lemma 11.4

Ist $R_G \varepsilon \mathcal{R}$ ein m-Tupel von Präferenzordnungen, die alle stetig, konvex zum Ursprung und homothetisch sind, so erfüllt $R_G=(R_1,\dots,R_m)$ die Paretobedingung genau dann, wenn gilt:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_m.$$

Die folgenden beiden wichtigen Sätze bilden den Abschlüß unseres Exkurses in die Wohlfahrtstheorie.

Theorem 11.8

Seien m individuelle Nachfragefunktionen $h^i: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}^n_+$, $x^i=h(p,M^i)$, alle mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$, gegeben, die die Prämissen D I - D V erfüllen und linear homogen in M^i sind. Ferner sei eine Verteilung $\delta=(\delta^1,\dots,\delta^m)$ so festgelegt, daß $M^i=\delta^i M$, $\delta^i>0$ und $\sum_{i=1}^{m} \delta^i = 1$. Dann erfüllt $\overline{R^*_G}=(\overline{R^*_h}1,\dots,\overline{R^*_h}m)$ [1]

(a) die Pigoubedingung

(b) die Paretobedingung

nur, wenn gilt:

$$\overline{R^*_h}1 = \overline{R^*_h}2 = \dots = \overline{R^*_h}m.$$

Beweis:

Nach Theorem 9.8 wissen wir bereits, daß alle $\overline{R^*_h}i$ stetig sind. Ferner geht aus dem Beweis von Lemma 11.2 hervor, daß die $\overline{R^*_h}i$ homothetisch sind.

Aufgrund von früheren Resultaten ergibt sich ebenfalls leicht, daß alle $\overline{R^*_h}i$ konvex zum Ursprung sind: Denn aus $\bar{z}^i \overline{R^*_h}i\, z^i$ folgt definitionsgemäß $\neg(z^i R^*_h i\, \bar{z}^i)$ und damit $\neg(z^i R_h i\, \bar{z}^i)$. Da es nach

---

1) Da gemäß Definition die Relation R^* von der gewählten Nachfragefunktion h abhängt und dieser Tatbestand hier von Wichtigkeit ist, wählen wir die Bezeichungsweise R^*_h.

D IIeine Budgetsituation $(p,M^1) \in \mathbb{R}^n_{++}$ mit $z^i = h(p,M^i)$ gibt, gilt $\neg(pz^i \geqq p\bar{z}^i)$ und damit $pz^i < p\bar{z}^i$.
Die Behauptung unseres Theorems ergibt sich dann sofort mit Hilfe unserer Lemmata 11.3 und 11.4.

Für den folgenden Satz erinnern wir zuvor an die Relation $\succsim^{\circ}$ aus Definition 10.5. Diese ist vollständig, transitiv und nach Theorem 10.6 strikt konvex zum Ursprung und damit auch konvex zum Ursprung. Ist die Nachfragefunktion linear homogen in M und erfüllt sie die Prämissen (S1)-(S6), so ist die Nutzenfunktion U_{p^*} stetig (vgl. Theorem 10.11). Das gleiche trifft dann auch wegen Definition 10.5 auf $\succsim^{\circ}$ zu. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach einem Resultat von Chipman (1974, S.30):

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n_{++})(\forall \lambda > 0)\,[U_{p^*}(\lambda x) = \lambda U_{p^*}(x)],$$

d.h. U_{p^*} ist linear homogen. Daher ist die Relation $\succsim^{\circ}$ auch homothetisch. Letztlich führt Theorem 10.4 unmittelbar darauf, daß h rational bezüglich $\succsim^{\circ}$ ist. Aufgrund dieser Ergebnisse gewinnen wir sofort den folgenden Satz:

Theorem 11.9

Seien m individuelle Nachfragefunktionen $h^i\colon \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{+}$ mit dem Wertebereich $\mathbb{R}^n_{++}$ gegeben, die alle linear homogen in M sind und die Prämissen (S1)-(S6) erfüllen. Ist ferner eine Verteilung wie in Theorem 11.8 festgelegt, so erfüllt

$$\succsim^{\circ}_G = (\succsim^{\circ}_1, \ldots, \succsim^{\circ}_m)\ ^{1)}$$

(a) die Pigoubedingung

(b) die Paretobedingung

genau dann, wenn gilt:

$$\succsim^{\circ}_1 = \succsim^{\circ}_2 = \ldots = \succsim^{\circ}_m .$$

---

1) Wie in Theorem 11.8 legen wir durch die Indizierung von fest, daß die $\succsim^{\circ}_i$ zu den individuellen Nachfragefunktionen h^i gehören.

Die Gesamtnachfragekorrespondenzen $H: \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+ \to 2^{\mathbb{R}^n_+}$, die wir hier kennengelernt haben, können als Spezialfälle von gesellschaftlichen Auswahlkorrespondenzen, die in der Theorie der kollektiven Wahl auftreten, betrachtet werden. Dieses Gebiet ist ebenfalls ein breites und sinnvolles Anwendungsfeld der Theorie der rationalen Wahl, worauf wir im nächsten Abschnitt kurz eingehen werden.

11.3 Kollektive Wahl und Rationalität

Die Theorie der gesellschaftlichen Wahl beschäftigt sich mit den Beziehungen zwischen dem individuellen und dem kollektiven Auswahlverhalten, deshalb können die gesamtwirtschaftlichen Nachfragefunktionen auch als Spezialfälle von gesellschaftlichen Auswahlkorrespondenzen betrachtet werden.
Die in den vorangegangenen Paragraphen dargestellten Ergebnisse über individuelle Auswahlkorrespondenzen gelten auch für gesellschaftliche, da wir die dort auftretenden Relationen oder Nutzenfunktionen als gesellschaftliche interpretieren können.
Es soll hier an zwei Beispielen gezeigt werden, daß rationale Auswahlregeln (vgl. § 3) von der gesellschaftlichen Auswahlkorrespondenz erfüllt werden können, wenn diese aus den individuellen Präferenzrelationen R_i durch eine Vorschrift hervorgeht. Aus diesem Grunde bedarf es zunächst der Einführung des Begriffs der gesellschaftlichen Auswahlkorrespondenz.

Definition 11.10

Sei ein Budgetraum $\langle X, \mathcal{B} \rangle$ wie üblich vorgegeben.
Ferner sei $\mathcal{D} \neq \emptyset$ eine Menge von m-Tupeln von Relationen, die alle auf X erklärt sind. Dann heißt $F: \mathcal{B} \times \mathcal{D} \to 2^X$ eine "soziale Auswahlkorrespondenz" genau dann, wenn die Bedingung:

$$\forall (B,D) \in \mathcal{B} \times \mathcal{D}: \begin{cases} F(B,D) \subseteq B \\ F(B,D) \neq \emptyset \end{cases}$$

erfüllt ist.

Wie aus der obigen Definition hervorgeht, soll jetzt nicht mehr angenommen werden, daß jedes Individuum eine fest vorgegebene Präferenzrelation besitzt, sondern es wird das Verhalten der Gesellschaft für alle möglichen Konstellationen der individuellen Präferenzordnungen untersucht. Damit ist $D=(D_1,\ldots,D_m)\varepsilon\mathcal{D}$ eine Variable, wobei wir mit D_i die Präferenzrelation des i-ten Individuums bezeichnen. In diesem Sinne stellt auch u_i nicht mehr eine feste Nutzenfunktion des i-ten Individuums dar, sondern eine mögliche Nutzenfunktion desselbigen, die von D_i abhängig ist.
Der folgende Satz zeigt, daß eine gesellschaftliche Auswahlkorrespondenz, welche garantiert, daß stets diejenige von zwei Alternativen gewählt wird, die den höchsten gesellschaftlichen Nutzen bringt, auch die rationale Verhaltensregel (CA) bzw. ihr gesellschaftliches Gegenstück (CA') erfüllt.
Zur Formulierung von (CA') führen wir noch die Relationen V_G und W_G, die V und W entsprechen, ein.

Definition 11.11

Sei $F: \mathcal{B}\times\mathcal{D} \to 2^X$ gegeben. Dann gilt für alle $x,y\varepsilon X$:

(a) $xV_Gy \;:\Leftrightarrow\; (\exists(B,D)\varepsilon\mathcal{B}\times\mathcal{D})[x\varepsilon F(B,D) \wedge y\varepsilon B]$

(b) $xW_Gy \;:\Leftrightarrow\; xV_Gy \vee (\exists x^1,\ldots,x^k)[xV_Gx^1 \wedge\ldots\wedge x^kV_Gy]$.

Damit lautet das gesellschaftliche Kongruenzaxiom:

(CA'): $x\varepsilon F(B,D) \wedge y\varepsilon B \wedge yW_Gy \;\Rightarrow\; y\varepsilon F(B,D)$.

Theorem 11.10

Sei $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$ vorgegeben. Ferner gebe es für alle $D\varepsilon\mathcal{D}$ individuelle (kardinale) Nutzenfunktionen $u_i: X\times D_i \to R$. Definieren wir dann eine Relation R_G^o auf X durch:

$$xR_G^oy \;:\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{m} u_i(x,D_i) > \sum_{i=1}^{m} u_i(y,D_i),$$

so erfüllt die soziale AWK $F:\mathcal{B}\times\mathcal{D}\to 2^X$ mit

$$F(B,D) = \{x \mid x\varepsilon B \wedge (\forall y\varepsilon B)[\neg(yR_G^ox)]\}, \quad \forall(B,D)\varepsilon\mathcal{B}\times\mathcal{D}$$

das Axiom (CA').

Beweis:
Führen wir die Relation $\overline{R_G^o}$ durch

$$x\overline{R_G^o}y \;:\Leftrightarrow \neg(yR_G^o x), \quad \forall x,y\varepsilon X,$$

ein, so sehen wir unmittelbar, daß diese transitiv und vollständig ist. Wenden wir dann das Theorem 6.10 an, so ergibt sich (CA') sofort.

Anmerkung 11.4

Da mit dem Kongruenzaxiom beispielsweise auch (α) erfüllt ist ., folgt aus den Voraussetzungen des vorigens Satzes, daß unter diesen auch ihr gesellschaftliches Gegenstück:

$$(\alpha') \quad B^1 \subseteq B^2 \wedge B^1 \cap F(B^2,D) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; F(B^1,D) = B^1 \cap F(B^2,D)$$

erfüllt ist.

Anmerkung 11.5

Enthält $\mathcal{B}$ alle zweielementigen Teilmengen von X und ist die gesellschaftliche Relation $\overline{R_G^o}$ wie in Theorem 11.10 definiert, so führt auch Arrow's "Impossibility Theorem" zu dem Resultat, daß unter den Voraussetzungen dieses Theorems ein Diktator existiert oder das Prinzip der "Unabhängigkeit der sozialen Auswahlfunktion von irrelevanten Alternativen" verletzt wird (vgl. Fishburn (1973, S.225)). Das gesellschaftliche Kongruenzaxiom ist jedoch, wie Theorem 11.10 bestätigt, erfüllt.

Wir wollen es bei diesen Beispielen für Rationalität bei sozialen Auswahlkorrespondenzen belassen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß es eine reichhaltige Literatur über rationale kollektive Wahl gibt. Beispielsweise hat Bordes gezeigt, daß die rationale Auswahlregel

$$(\beta+): \quad (\forall B,B'\varepsilon\mathcal{B})(\forall D\varepsilon\mathcal{D})[(B\subseteq B' \wedge B\cap F(B',D) \neq \emptyset) \Rightarrow F(B,D) \subseteq B\cap F(B',D)]$$

mit gewissen Bedingungen für "demokratisches" Verhalten (vgl. Bordes (1976, S. 451-457)) vereinbar ist. In diesem Zusammenhang soll insbesondere auch auf den Übersichtsartikel "Social Choice Theory: A Re-Examination" von Sen (1977) hingewiesen werden.

11.4 Zusammenfassung

Im 1. Teil dieser Arbeit haben wir die Fragestellungen untersucht:

a) Welche Eigenschaften muß eine Präferenzrelation besitzen, damit eine Auswahlkorrespondenz existiert?

b) Wann ist eine AWK repräsentierbar?

c) Unter welchen Bedingungen ist sie rational?

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den rationalen Entscheidungsregeln?

e) Welchen Einfluß besitzen die Entscheidungsregeln auf die Rationalisierbarkeit und Repräsentierbarkeit von Auswahlkorrespondenzen?

f) Wie lassen sich die Ergebnisse von (a)-(e) auf Budgetpräferenzen und indirekte Nutzenfunktionen übertragen?

Daran anschließend wurde an einigen Beispielen demonstriert, daß sich die Resultate, die wir im ersten Teil gewonnen haben, in ökonomischen Modellen sinnvoll interpretieren lassen. Wir betrachteten Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der rationalen Wahl in der Nachfragetheorie, Gleichgewichtstheorie, Außenwirtschaftstheorie, Wohlfahrtstheorie und in der Theorie der gesellschaftlichen Wahl. Es könnten aber auch noch andere Beispiele, wie die Portfolioplanung gewählt werden, denn in allen Modellen, in denen eine Gewinn- oder Nutzenfunktion betrachtet wird, werden auch rational handelnde Individuen oder Gruppen vorausgesetzt.

Literaturangaben

Afriat, S.N. (1967): The Construction of Utility Functions from Expenditure Data
International Economic Review 8, 67-77

- , : Demand Functions and the Slutsky Matrix
Princeton, New York: Princeton University Press

Arrow, K.J. (1951):Social Choice and Individual Values
New York: John Wiley

-, (1959): Rational Choice Functions and Orderings
Economica 26, 121-127

Becker, G. (1962): Irrational behavior and economic theory
Journal of Political Economy 70, 1-14

Bordes, G. (1976): Consistency, Rationality, and Collective Choice
Review of Economic Studies 43, 451-457

Cantor, G. (1895): Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre
Math.Ann. 46, 481-512

Chernoff, H. (1954): Rational Selection of Decision Functions
Econometrica 22, 422-443

Chipman, J.S. (1974): Homothetic preferences and aggregation
Journal of Economic Theory 8, 26-38

Chipman, J.S., Moore, J.C. (1973): Aggregate Demand, Real National Income,and the Compensation Principle
International Economic Review 14, 153-181

-, (1977): Continuity and Uniqueness in Revealed Preference
Journal of Mathematical Economics,139-162

-, (1978): The New Welfare Economics 1939-1974
International Economic Review 19, 547-584

-, (1979): On Social Welfare Functions and the Aggregation of Preferences
Journal of Economic Theory 21, 111-139

-, (1980): Real National Income with Homothetic Preferences and a Fixed Distribution of Income
Econometrica 48, 401-422.

Deaton, A., Muellbauer, J. (1980): Economics And Consumer Behavior
Cambridge: Cambridge University Press

De Finetti, B.(1937): La prévision: ses lois logique, ses sources subjectives
Annales de l'Institut Henri Poincaré 7,1-68

Debreu, G.(1954): Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Decision Processes.
Herausgegeben von R.M.Thrall, C.H.Coombs, R.L.Davis
New York:John Wiley, 159-165

-, (1959):Theory of Value
New York: John Wiley

Dieudonné, J. (1960): Foundations of Modern Analysis
New York: Academic Press

Diewert,W.E. (1973): Afriat and Revealed Preference Theory
Review of Economic Studies 40, 419-425

-, (1976): Harbergers's Welfare Indicator and Revealed Preference Theory
American Economic Review 66,142-152

Eggleston,H.G. (1977): Convexity
Cambridge: Cambridge University Press

Eichhorn,W. (1978): Functional Equations in Economics
London: Addison-Wesley Publishing Company

Eisenberg, E.(1961): Aggregation of Utility Functions
Management Science 7,337-350

Fishburn,P.C. (1970): Utility Theory for Decision Making
New York: John Wiley

-, (1973): The Theory of Social Choice
Princeton: Princeton University Press

-, (1974): Choice Functions on Finite Sets
International Economic Review 15, 729-749

-, (1976): Representable Choice Functions
Econometrica 44,1033-1043

Fuchs-Seliger,S. (1976 a): Äquivalenz von Axiomen in der Theorie der rationalen Wahl
Zeitschrift für Nationalökonomie 36, 173-182

-, (1976 b): Zur Theorie der Revealed Preference
Meisenheim a.G.:Anton Hain Verlag

-, (1976 c): Bemerkungen zur Widerspruchsfreiheit der Axiome in der Theorie der revealed preference, in: Mathematical Economics and Game Theory, herausgegeben von R.Henn und O.Moeschlin
Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag,217-226

-, (1979): Revealed Preference and the Economic Theory of Index Numbers
in: Theory and Applications of Economic Indices, herausgegeben von W.Eichhorn, R.Henn, O.Opitz, R.W.Shephard
Würzburg:Physica-Verlag 161-175

-, (1980 a): Uzawa's Preference Axioms - A Comment
Review of Economic Studies 47, 641-644

-, (1980 b): On the Continuity of Utility Functions in the Theory of Revealed Preference
International Economic Review 3, 611-618.

-, (1981 a):Interrelations between Choice Rules
in: OR-Verfahren, herausgegeben von R.Henn u.a. Meisenheim a.G.: Verlagsgruppe Athenäum /Hain,Scriptor,Hanstein, S. 31-45.

-, (1981b): Aggregation with a Fixed Distribution of Income
Zeitschrift für Nationalökonomie 41, 69 - 78

Gale, D. (1960): A Note on Revealed Preference
Econometrica 27, 348-354

Gale, D., Mas-Colell, A. (1975): An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences
Journal of Mathematical Economics 2, 9-15

Georgescu-Roegen, N. (1935): The Pure Theory of Consumer's Behavior
Quarterly Journal of Economics 50, 345-393

Hansson, B. (1968): Choice Structures and preference relations
Synthese 18, 443-458

-, (1969 a): Voting and group decision functions
Synthese 20, 526-537

-, (1969 b): Group preferences
Econometrica 50-54

Helly, E. (1921): Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten
Monatsschr. Math. Phys. 31, 60-91

Hèrzberger, H. (1973): Ordinal Preference and Rational Choice
Econometrica 41, 187-237

Hicks, J.R. (1946): Value and Capital
2. Aufl. Oxford: Clarendon Press

-, (1956): A Revision of Demand Theory
Oxford: Clarendon Press

Houthakker, H.S. (1950): Revealed preference and the utility function
Econometrica 17, 159-174

Hurwicz, L. (1971): On the Problem of Integrability of Demand Functions, in: Preferences, Utility, and Demand
herausgegeben von J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter und H.F. Sonnenschein
New York: Harcourt Brace Jovanovich 174-214

Hurwicz, A., Richter, M.K. (1971): Revealed Preference without Demand Continuity Assumptions, in: Preferences, Utility, and Demand
s. Hurwicz (1971): S. 59-76

Hurwicz, L. Uzawa, H. (1971): On the Integrability of Demand Functions in: Preferences, Utility and Demand, s. Hurwicz (1971), 114-148

Inada, K. (1970): Majority Rule and Rationality
Journal of Economic Theory 2, 27-40

Jamison, D.T., Lau, L.J. (1973): Semiorders and the Theory of Choice
Econometrica 41, S. 901-912

Katzner, D.W. (1970): Static Demand Theory
London: Macmillan Comp.

Kihlstrom, R., Mas-Colell, A., Sonnenschein, H. (1976): The Demand Theory of the Weak Axiom of Revealed Preference Econometrica 44,971-978

Krantz, D.H., Luce,D.R.,Suppes,P., Tversky, A. (1971): Foundations of Measurement
New York: Academic Press

Little, J.M.D. (1949): A reformulation of the theory of consumer's behavior
Oxford Economic Papers 1, 90-99

-, (1950): A Critique of Welfare Economics
2. Aufl. Oxford: Oxford University Press

Little, J.T. (1979): Indirect Preferences
Journal of Economic Theory 20, 182-193

Luce, R.D., Raiffa, H. (1959): Games and decisions
New York: John Wiley

Mas-Colell, A. (1974): An Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences
Journal of Mathematical Economics 1, 237-246

-, (1977): The Recoverability of Consumer's Preferences from Market Demand Behavior
Econometrica 45, 1409-1430

-, (1978): On Revealed Preference Analysis
Review of Economic Studies 45, 121-131

McKenzie, L.W. (1956-7): Demand Theory without a Utility Index
Review of Economic Studies 24, 185-189

McShane, F.J., Botts, T. (1952): Real Analysis
Princeton: Van Nostrand

Milne, F. (1979): Consumer Preferences, Linear Demand Functions and Aggregation in Competitive Asset Markets
Review of Economic Studies 46, 407-417

v.Moeseke, P. (1969): Revealed Preference: Equivalence Theorem and Induced Preorder, in: Economic Models, Estimation and Risk Programming, herausgegeben von K.Fox, J.Sengupta, J.Narasimhan
Berlin-Heidelberg-New York:Springer Verlag

Muellbauer, J. (1975): Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand
Review of Economic Studies 42, 525-543

Mukherji, A. (1977): The Existence of Choice Functions
Econometrica 45, 889-894

Nash, J.F. (1950): The Bargaining Problem
Econometrica 18

Pattanaik, P.K. (1970): On Social Choice with Quasitransitive Individual Preferences
Journal of Economic Theory 2, 267-275

Pfanzagl, J. (1971): Theory of Measurement
2.Aufl. Würzburg-Wien: Physica-Verlag

Pigou,A.C. (1932): The Economics of Welfare
4.Aufl. London:Macmillan

Pollak, R.A. (1971): Additive Utility Functions and Linear Engel Curves
Review of Economic Studies 38, 401-414

Rader, T. (1963): The Existence of a Utility Function to Represent Preferences
Review of Economic Studies 30, 229-232

Radner,R., Marschak, J. (1954): Note on Some Proposed Decision Criteria, in: Decision Processes, herausgegeben von: R.M.Thrall, C.H.Coombs, R.L.Davis
New York: John Wiley,61-68

Richter,M.K. (1966): Revealed Preference Theory
Econometrica 34, 635-645

-, (1971): Rational Choice
in: Preferences, Utility, and Demand
s. Hurwicz (1971), 29-58

-, (1979): Duality and Rationality
Journal of Economic Theory 20, 131-181

Rose, H. (1958): Consistency of Preference: The Two-Commodity Case
Review of Economic Studies 35, 124-125

Sakai, Y. (1974): Equivalence of the Weak and Strong Axiom of Revealed Preference without Demand Continuity Assumptions: A "Regularity Condition" Approach
Journal of Economic Theory 8, 292-304

-, (1977): Revealed Favorability, Indirect Utility, and Direct Utility
Journal of Economic Theory 14, 113-129

Samuelson, P.A. (1938): A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior
Economica 5, 61-71 und 353-354

-, (1947): Foundations of Economic Analysis
Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1947

-, (1950): The Problem of Integrability in Utility Theory
Economica 17, 355-385

Schwartz, Th. (1975): Choice Functions, "Rationality" Conditions, and Variations on the Weak Axiom of Revealed Preference
Journal of Economic Theory 13, 414-427

Sen, A.K. (197o): Collective Choice and Social Welfare
San Francisco:Holden-Day

-, (1977): Social Choice Theory: A Re-Examination 45, 53-84

Sen, A., Pattanaik, P.K. (1969): Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice under Majority Decision
Journal of Economic Theory 1, 178-202

Shafer, W.J. (1974): The Nontransitive Consumer
Econometrica 42, 913-919

-, (1975): Preference Relations for Rational Demand Functions
Journal of Economic Theory 11, 444-455

-, (1977): Revealed Preference and Aggregation
Econometrica 45, 1173-1182

Sonnenschein, H. (1971 a): Demand Theory without Transitive Preferences, With Applications to the Theory of Competitive Equilibrium
in: Preferences, Utility, and Demand: s.Hurwicz (1971), 215-223

-, (1971b): On the Lower Semicontinuity of Utility Functions Derived from Demand Data, in: s. Hurwicz (1971), S. 77-80

Stigum, B.P. (1973): Revealed Preference -A Proof of Houthakker's Theorem
Econometrica 41, 411-423

Streissler, E., Streissler,M. (1966): Konsum und Nachfrage
Köln, Berlin:Kiepenheuer & Witsch

Suzumura, K. (1976): Rational Choice and Revealed Preference
Review of Economic Studies 43, 149-158

-, (1977): Houthakker's Axiom in the Theory of Rational Choice
Journal of Economic Theory 14, 284-290

Szpilrajn,E.(1930): Sur l'extension de l'ordre partiel
Fundamenta Mathematica 16, 386-389

Takayama, A. (1974): Mathematical Economics
Hinsdale, Illinois: The Dryden Press

Uzawa, H. (1956): Note on Preference and Axioms of Choice
Annals of the Institute of Statistical Mathematics 8, 35-40

-, (1960): Preference and Rational Choice in the Theory of Consumption, in: Mathematical Methods in Social Sciences herausgegeben von K.J.Arrow, S.Karlin, P.Suppes
Stanford University Press

-, (1971): A Revision of Uzawa (1960) in: Preferences, Utility,and Demand
s. Hurwicz (1971), 7-28

Ville, J. (1946): Sur les conditions d'existence d'une ophêlimité totale et d'un indice du niveau des prix
Annales de l'Universitê de Lyon 9, Sec. A(3), 32-39

Wald, A. (1936): Über einige Gleichungssysteme der Mathematischen Ökonomie
Zeitschrift für Nationalökonomie 7, 637-670

Weddepohl, H.N. (1970): Axiomatic Choice Models and Duality
Rotterdam University Press

Wilson, R.B. (1970): The Finer Structure of Revealed Preference
Journal of Economic Theory 2, 348-353